Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grandes Desvios de Extremos sob Normalização Potência

Felipe Sousa Quintino

Brasília
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grandes Desvios de Extremos sob Normalização Potência

por

Felipe Sousa Quintino

Orientadora: Prof. Dra. **Cátia Regina Gonçalves**

Brasília
2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

QQ7g

Quintino, Felipe Sousa
Grandes Desvios de Extremos sob Normalização Potência / Felipe Sousa Quintino; orientador Cátia Regina Gonçalves. -- Brasília, 2017.
94 p.

Disserta??o (Mestrado - Mestrado em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2017.

1. Grandes Desvios. 2. Teoria dos Valores Extremos. 3. Normalização Potência. 4. Distribuições p max-estáveis. I. Gonçalves, Cátia Regina, orient. II. Título.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Grandes desvios de extremos sob normalização potência

por

Felipe Sousa Quintino *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 11 de julho de 2017.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Cátia Regina Gonçalves - MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Ary Vasconcelos Medino – MAT/UnB (Membro)

Profa. Dra. Débora Borges Ferreira - UFRN (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Dedicatória

Dedico meu título de mestre ao Sgt Yuri do Prado Guimarães: um irmão que a vida me deu e tirou.

"essentially, all models are wrong, but some are useful"

George Edward Pelham Box

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por todas as oportunidades que tem me proporcionado até aqui. Agradeço também a minha família que sempre esteve ao meu lado nos momentos em que precisei. De forma especial à minha mãe Elci e minha namorada Aline.

Agradeço a minha orientadora, a professora Cátia, por toda a disposição para prontamente me ajudar com qualquer dificuldade que tive ao longo dos estudos e da elaboração desse trabalho e por todos os seus ensinamentos desde minha graduação.

Agradeço aos professores Débora e Ary por aceitarem compor a banca examinadora e pelas sugestões para a versão final deste trabalho.

Agradeço a todos os amigos que fiz ao longo do curso, pois em muito contribuíram para a minha formação. Não citarei todos para não ser injusto esquecendo vários nomes, mas em especial àqueles que compartilharam os sofrimentos das qualificações de mestrado: Alancoc, Alex, Carol, Fabian, Filipe, Guilhermo, Herlisvaldo, Marta, Matheus, Natália, Wallef, Weliton, Wenison, Wilson,... Também aos amigos do curso de bacharelado em Estatística Augusto e Thiago que muito me motivaram para este mestrado em Matemática.

Agradeço aos professores e funcionários do departamento Matemática que colaboraram diretamente para minha formação.

Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a propriedade de grandes desvios de extremos de uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, apropriadamente normalizados e convergindo fracamente para uma distribuição limite extremal. Apresentamos, em detalhes, os resultados de Feng e Chen [12] que, baseados no caso clássico de extremos sob normalização linear, estabeleceram condições necessárias e suficientes para grandes desvios de extremos sob normalização potência.

Palavras-chave: Grandes Desvios, Teoria dos Valores Extremos, Normalização Potência, Distribuições p-max-estáveis.

Abstract

In this work, we study large deviations of extremes of independent and identically distributed random variables, appropriately normalized and converging weakly to an extreme limit distribution. We present, in detail, the results of Feng and Chen [12] which, based on the classical case of extremes under linear normalization, presented necessary and sufficient conditions for large deviations of extremes under power normalization.

Keywords: Large Deviations, Extreme Value Theory, Power Normalization, P-max-stable laws.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

i.e.	:	Isto é.
f.d.	:	Função de distribuição
v.a.	:	Variável aleatória.
i.i.d.	:	independente e identicamente distribuídas.
A^∞	:	$\Big\{\{a_n\}; a_n \in A \ e \ n = 1, 2, \cdots\Big\}$.
$F^{\leftarrow}$	:	$\inf\{x; F(x) \geq t\}$.
$f(x) \sim g(x)$ quando $x \to a$	:	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
$f(x) = o(g(x))$ quando $x \to a$	:	$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
$f(x) = O(g(x))$ quando $x \to a$	:	$\limsup_{x\to a} \left\lvert\frac{f(x)}{g(x)}\right\rvert < \infty$.
$n(t)$	:	Função de densidade da distribuição normal padrão.
$N(t)$	:	Função de distribuição da distribuição normal padrão.
$r(F)$	:	$\sup\{x; F(x) < 1\}$.
$l(F)$	:	$\inf\{x; F(x) > 0\}$.
$\stackrel{p}{\to}$	:	Convergência em probabilidade.
$\stackrel{q.c.}{\to}$	:	Convergência quase-certa.
$sign(y)$	:	Sinal de y (p.12).
$D_l(H)$	:	Domínio de atração sob normalização linear (p.12).
$D_p(H)$	:	Domínio de atração sob normalização potência (p.12).
RV_α	:	Regularmente variante com índice α (p.13).
$C(G)$	:	Conjunto dos pontos de continuidade de uma f.d. G.
$N(0,1)$	:	Distribuição normal padrão.
$\lfloor t \rfloor$	:	Maior inteiro menor ou igual a t.
$\mathbb{R}$	:	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}_+$	:	Conjunto dos números reais estritamente positivos.
$\mathbb{N}$	:	Conjunto dos números naturais.
$I_A(x)$	:	Função indicadora no conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Introdução

A Teoria dos Valores Extremos é um ramo da Probabilidade e Estatística que estuda a modelagem de eventos extremos que estão relacionados à máximos e mínimos de amostras aleatórias extraídas de uma determinada população. Aplicações desta teoria são encontradas em finanças, catástrofes naturais, falhas de equipamentos, dentre outros.

A *Teoria dos Valores Extremos Clássica* consiste em estudar as possíveis distribuições limites e suas propriedades para o máximo normalizado linearmente. Especificamente, seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas ($i.i.d.$) com função de distribuição comum F. Considerando $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ tem-se que M_n converge quase-certamente, quando $n \to \infty$, para $r(F) = \sup\{x; F(x) < 1\}$. Nessa teoria estuda-se propriedades de F e das possíveis funções de distribuição não-degeneradas G que satisfazem

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \quad \forall x \in C(G), \tag{1}$$

para sequências de constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, apropriadamente escolhidas, onde $C(G)$ denota o conjunto dos pontos de continuidade de G.

Observando que

$$\min\{X_1, \cdots, X_n\} = -\max\{-X_1, \cdots, -X_n\},$$

os resultados apresentados para o máximo podem ser convertidos para o mínimo.

As possíveis funções de distribuição G satisfazendo (1) são conhecidas desde Fisher e Tippett [13] e bastante estudadas por diversos autores desde então. Elas são conhecidas também como *max estáveis sob normalização linear* ou *l-max-estáveis* e podem ser apenas de três tipos bem conhecidos: Fréchet, Weibull ou Gumbel.

O conceito de *max-domínio de atração sob normalização linear* de uma função de distribuição l-max-estável G consiste no conjunto de todas as funções de distribuição F satisfazendo (1). Dessa forma, caracterizar as funções de distribuição cujo máximo parcial de variáveis aleatórias *i.i.d.* normalizado linearmente converge para uma das distribuições *l-max-estáveis* é o mesmo que caracterizar os max-domínios de atração de cada distribuição dos valores extremos. Essas caracterizações são baseadas nos conceitos de funções *regularmente variantes* e de *funções de Von Mises*.

Com intuito de aplicações estatísticas, as distribuições l-max-estáveis podem ser resumidas numa única função de distribuição chamada *distribuição dos valores extremos generalizada* (GEV). Assim como as distribuições l-max-estáveis, a caracterização do domínio de atração da GEV é bem conhecida e diversas outras propriedades também são generalizadas para esse caso. Com uma leitura de Resnick [31], Galambos [14], Embrechts et al. [9] ou de Haan e Ferreira [19] é possível realizar um estudo detalhado sobre a Teoria dos Valores Extremos Clássica.

Tendo em vista a existência de funções de distribuição que não pertencem ao max-domínio de atração sob normalização linear de nenhuma das distribuições l-max-estáveis, o comportamento assintótico do máximo M_n normalizado por uma sequência de transformações $\{g_n(x)\}$, não necessariamente lineares, contínuas e estritamente monótonas, ou seja, a existência da distribuição assintótica

$$\lim_{n\to\infty} P\left(g_n^{-1}(M_n) \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(M_n \leq g_n(x)\right) = H(x), \quad \forall x \in C(H), \tag{2}$$

tem sido tema de diversos estudos.

Em particular, Pantcheva [27] analisou as distribuições assintóticas em (2) para o caso em que $g_n(x) = \alpha_n |x|^{\beta_n} sign(x)$, isto é, uma *normalização potência.* Especificamente, estudou as possíveis distribuições não-degeneradas H satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} P\left(M_n \leq g_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} F^n\left(\alpha_n |x|^{\beta_n} sign(x)\right) = H(x), \ \forall x \in C(H), \tag{3}$$

para apropriadas sequências de constantes $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$, onde $sign(x) = -1$, 0 ou 1, de acordo com que $x < 0$, $= 0$ ou > 0, respectivamente. As possíveis distribuições H satisfazendo (3) são chamadas *max estáveis sob normalização potência* ou, simplesmente, *p-max-estáveis.* Se H é uma distribuição p-max-estável, seu max-domínio de atração sob normalização potência, denotado por $D_p(H)$, consiste no conjunto de todas as funções de distribuição F para as quais existem sequências de constantes $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ tais que (3) é satisfeita.

Pantcheva [27] provou que existem seis tipos de distribuições p-max-estáveis. A extensão das definições e de diversas propriedades das distribuições l-max estáveis para as p-max-estáveis ocorrem naturalmente. Condições necessárias e suficientes para uma função de distribuição pertencer ao domínio de atração do máximo sob normalização potência, de cada uma das seis distribuições p-max-estáveis, foram obtidos por Mohan e Ravi [25] e Subramanya [36], entre outros. Além disso, Mohan e Ravi [25] mostraram que os max-domínios de atração sob normalização potência são mais abrangentes do que sob normalização linear.

Analogamente ao caso da normalização linear, Nasri-Roudsari [26] resumiu os seis tipos das distribuições de valores extremos sob normalização potência em dois tipos de funções de von-Mises. Christoph e Falk [7] estudaram a relação entre os domínios de atração das distribuições p-max-estáveis e l-max-estáveis. Peng et al. [29] estudaram a convergência de momentos e a convergência das densidades de extremos sob normalização potência.

Além disso, existem muitos resultados sobre a qualidade da convergência na Teoria dos Valores Extremos. Os tópicos incluem convergência de momentos, teoria de limites locais e convergência de densidades, taxas de convergência uniformes e grandes desvios. Em Resnick [31] é possível fazer um levantamento bibliográfico sobre esses temas sob normalização linear.

Nosso interesse neste trabalho é a propriedade de *Grandes Desvios* que, em linhas gerais, consiste no estudo de eventos raros, ou seja, aqueles cuja probabilidade tende a zero. Existem diversas ramificações desse estudo dentro da teoria de probabilidade e uma de suas aplicações é a análise das caudas de distribuições de probabilidade. No contexto da Teoria dos Valores Extremos, o interesse é sobre o comportamento assintótico da cauda da distribuição do máximo M_n devidamente normalizado.

Assim, assumindo a ocorrência de (2), temos para n grande

$$P(M_n > g_n(x)) = 1 - F^n(g_n(x)) \sim 1 - H(x)$$

e estamos interessados na qualidade desta aproximação para grandes valores de x. Observamos que a medida que x cresce, $1 - H(x)$ e $1 - F^n(g_n(x))$ estão cada vez mais próximos de zero e é de interesse utilizar um erro relativo, ou seja, examinar o quão próximo o quociente

$$\frac{1 - F^n(g_n(x))}{1 - H(x)}$$

está de 1 para valores grandes de x e n.

Dessa forma, no estudo de grandes desvios de extremos (máximos) procuramos estabelecer condições para a existência de uma sequência $\{x_n\}$, $x_n \uparrow r(F)$ e condições sobre a velocidade do seu crescimento de tal forma que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(g_n(y_n))}{1 - H(y_n)} = 1, \tag{4}$$

para qualquer sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n = O(x_n)$, ou, equivalentemente, para $A > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\leq Ax_n} \left| \frac{P(M_n > g_n(x))}{1-H(x)} - 1 \right| = 0.$$

Ou seja, (4) estabelece para quais valores grandes de x podemos ter $1 - H(x)$ como uma boa aproximação para $P(M_n > g_n(x))$ para n suficientemente grande.

Para o caso clássico, ou seja, quando $g_n(x) = a_n x + b_n$, Anderson [1] e Goldie e Smith [18] caracterizaram a ocorrência de grandes desvios de extremos sob normalização linear, no caso da distribuição de Fréchet, utilizando uma definição mais restritiva de função lentamente variante, que denominaram *super lentamente variante*. Além disso, pela relação existente entre as funções de distribuição de Fréchet e Weibull, os resultados para a segunda distribuição l-max-estável podem ser obtidos através dos resultados da primeira. De Haan e Hordijk [20] apresentaram uma condição suficiente para a ocorrência de grandes desvios dos extremos no caso da distribuição Gumbel. Drees et al.[8] obtiveram um resultado geral para grandes desvios de extremos sob normalização linear utilizando condições de segunda ordem. Em Resnick [31] podemos encontrar em detalhes uma coletânea dos principais resultados sobre as propriedades de grandes desvios de extremos sob normalização linear.

Recentemente, Feng e Chen [12] estudaram a propriedade de grandes desvios de extremos sob normalização potência, ou seja, considerando $g_n(x) = \alpha_n |x|_n^{\beta} sign(x)$ em (2). Utilizando as ferramentas conhecidas da teoria de distribuições p-max-estáveis, obtiveram condições necessárias e suficientes para a propriedade de grandes desvios de cada uma das seis possíveis distribuições p-max-estáveis.

O objetivo central do nosso trabalho foi o estudo detalhado dos resultados apresentados por Feng e Chen [12]. Assim, a presente dissertação está organizada em quatro capítulos.

No Capítulo 1 apresentamos notações, conceitos e propriedades básicas que serão utilizadas no desenvolvimento dos capítulos seguintes. Em particular, apresentamos uma revisão dos principais resultados da teoria de variação regular que é a base da teoria dos valores extremos.

No Capítulo 2, apresentamos uma síntese da Teoria dos Valores Extremos Clássica (ou seja, sob normalização linear) e sob normalização potência. Os possíveis tipos de distribuição l-max-estáveis e a caracterização dos seus respectivos domínios de atração são apresentados na Seção 2.1. Na Seção 2.2 apresentamos as possíveis distribuições p-max-estáveis existentes e a caracterização dos domínios de atração de cada uma delas.

No Capítulo 3 abordamos o estudo da propriedade de grandes desvios de extremos sob normalização linear, apresentando uma revisão dos principais resultados encontrados na literatura e que serão de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria de grandes desvios sob normalização potência.

Finalmente, no Capítulo 4 estudamos em detalhes os resultados apresentados no artigo de Feng e Chen [12], tema central deste trabalho. O capítulo é dividido em seis seções. Em cada seção abordamos cada um dos seis tipos de distribuições p-max-estáveis, apresentando os respectivos resultados que estabelecem condições necessárias e suficientes para a ocorrência da propriedade de grandes desvios de extremos sob normalização potência.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos notações, definições e propriedades básicas utilizadas nos capítulos seguintes. Em seguida, apresentamos as definições de Máximo Domínio de Atração e Distribuições Max-estáveis. No fim deste capítulo fizemos uma revisão dos principais resultados da teoria de variação regular utilizados nos capítulos seguintes. As principais referências deste capítulo são: Resnick [31], Cook [6] e Pantcheva [27].

1.1 Notações, Definições e Propriedades Básicas

Considere um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por $\{a_n\}$ a sequência $(a_1, a_2, \cdots)$ em A e por A^∞ o conjunto de tais sequências, ou seja,

$$A^\infty = \Big\{ \{a_n\}; a_n \in A \ e \ n = 1, 2, \cdots \Big\}.$$

Seja F uma função não-decrescente sobre $\mathbb{R}$. Usando a convenção de que o ínfimo de um conjunto vazio é $+\infty$, definimos a *inversa generalizada de* F (contínua à esquerda) por

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{x; F(x) \geq t\}.$$

Note que se a inversa de F existe, então ela coincide com a inversa generalizada. As principais propriedades da inversa generalizada que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho são apresentadas na proposição a seguir.

Proposição 1.1 *Seja F uma função não-decrescente sobre $\mathbb{R}$. Então*

(a) $F^{\leftarrow}(1 - 1/t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t)$, $t > 0$.

(b) $F\left(F^{\leftarrow}(y)\right) \geq y$.

(c) se $y < F^{\leftarrow}(x)$, *então* $F(y) < x$.

Prova. (a) Pela definição de inversa generalizada obtemos que, para $t > 0$,

$$
\begin{aligned}
F^{\leftarrow}(1-1/t) &= \inf\{x; F(x) \geq 1-1/t\} \\
&= \inf\{x; 1-F(x) \leq 1/t\} \\
&= \inf\{x; (1-F(x))^{-1} \geq t\} \\
&= \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t).
\end{aligned}
$$

Para as provas de (b) e (c) ver Resnick [31].

□

Sendo f e g funções reais, dizemos que f e g são *equivalentes* quando $x \to a$ e denotamos por $f \sim g$ se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Caso

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

dizemos que $f(x) = o(g(x))$, quando $x \to a$. Para os casos em que

$$\limsup_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty,$$

denotamos $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$.

Temos imediatamente da definição que $\sim$ define uma relação de equivalência. Este fato será importante em diversas demonstrações nos capítulos 3 e 4.

Os seguintes exemplos são aplicações da definição de equivalência assintótica de funções. Além disso, estes exemplos serão retomados em algumas demonstrações nos próximos capítulos.

Exemplo 1.1 *As funções $f(x) = 1 - e^{-x}$ e $g(x) = x$ são equivalentes quando $x \to 0$. De fato, por L'Hopital, temos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1.$$

Exemplo 1.2 *As funções $f(x) = 1 - \exp\{-e^{-x}\}$ e $g(x) = e^{-x}$ são equivalentes quando $x \to \infty$.*

De fato, como $f(x), g(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, por L'Hopital, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \exp\{-e^{-x}\} = 1.$$

Exemplo 1.3 *As funções* $f(x) = -\log x$ *e* $g(x) = 1 - x$ *são equivalentes quando* $x \to 1$.

Por L'Hopital temos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Encerramos esta seção apresentando dois lemas que serão utilizados nos capítulos 2 e 4, em exemplos de aplicação da teoria estudadas nesses capítulos.

Sejam $N(t)$ a f.d. de uma v.a. com distribuição normal padrão e $n(t)$ sua respectiva função densidade de probabilidade. Uma vez que $N(t)$ não possui forma fechada, para estudar certas propriedades da cauda da distribuição normal, a *razão de Mills* [24] dada por $\frac{1-N(t)}{n(t)}$ é frequentemente usada (vide, por exemplo, Feller [10] p.175 e 179, Grimmett e Stirzaker [16] p.39 e 210, Cook [6], Birnbaum [5], Komatu [22], Sampford [33], Baricz [4], Yang e Chu [37]).

Lema 1.1 *Seja* $N(t)$ *a f.d. normal padrão com densidade*

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Então são válidas as seguintes desigualdades:

(i)

$$\frac{t}{1+t^2} < \frac{1-N(t)}{n(t)} < \frac{1}{t}, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

Em particular,

$$1 - N(t) \sim t^{-1} n(t), \quad t \to \infty.$$

(ii)

$$\frac{2}{t + \sqrt{t^2+4}} < \frac{1-N(t)}{n(t)} < \frac{4}{3t + \sqrt{t^2+8}}, \quad t \to \infty.$$

Prova.

(i) Observe que

$$N''(t) = n'(t) = -t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = -tn(t). \tag{1.2}$$

Se $t > 0$, para $x \in (t, \infty)$, temos que $x/t > 1$, de modo que

$$\begin{aligned} 1 - N(t) &= \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &< \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{t} e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \\
&= \frac{1}{t}n(t),
\end{aligned}
$$

onde na penúltima igualdade usamos a substituição $z = x^2/2$. Logo, temos a validade da segunda desigualdade.

Para a primeira desigualdade, defina

$$g(t) = 1 - N(t) - \frac{t}{1+t^2}n(t).$$

Vamos mostrar que g é sempre estritamente positiva. De fato, por (1.2), a derivada de g é dada por

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \big(1 - N(t)\big)' - \left(\frac{t}{1+t^2}\right)' n(t) - \frac{t}{1+t^2}n'(t) \\
&= -n(t) - \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}n(t) + \frac{t^2}{1+t^2}n(t) \\
&= \frac{-(1+t^2)^2 - (1-t^2) + t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^2}n(t) \\
&= -\frac{2}{(1+t^2)^2}n(t) < 0,
\end{aligned}
$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $n(t) > 0$. Assim, g é estritamente decrescente. Além disso, como $\lim_{t\to\infty} N(t) = 1$, $\lim_{t\to\infty} n(t) = 0$, segue que

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0.$$

Com isso, g é sempre positiva. Logo,

$$\frac{t}{1+t^2} < \frac{1-N(t)}{n(t)}.$$

Em particular, temos que

$$\frac{t^2}{1+t^2} < \frac{1-N(t)}{t^{-1}n(t)} < 1,$$

logo,

$$1 - N(t) \sim t^{-1}n(t), \quad t \to \infty.$$

(ii) Para a primeira desigualdade ver Birnbaum [5] e Komatu [22]. A prova da segunda desigualdade pode ser encontrada em Sampford [33]. Para uma prova alternativa de ambas as desigualdades ver e Baricz [4].

□

O próximo lema é uma aplicação das desigualdades do Lema 1.1(ii) e será importante para o desenvolvimento do Exemplo 4.1 do Capítulo 4.

Lema 1.2 *Seja $N(t)$ a f.d. normal padrão com densidade $n(t)$. Defina*

$$h(t) = 2\sqrt{\pi} t e^{t^2} \left(1 - N(\sqrt{2}t)\right) - 1, \quad t > 0.$$

Então

$$h(t) \sim \frac{1 - \sqrt{1 + 4/t^2}}{3 + \sqrt{1 + 4/t^2}}, \quad t \to \infty.$$

Prova. Observe que

$$h(t) = \sqrt{2}t \frac{1 - N\left(\sqrt{2}t\right)}{n\left(\sqrt{2}t\right)} - 1, \quad t > 0.$$

Pelo Lema1.1(ii), para $t > 0$, temos que

$$\frac{2}{\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2 + 4}} < \frac{1 - N\left(\sqrt{2}t\right)}{n\left(\sqrt{2}t\right)} < \frac{4}{3\sqrt{2}t + \sqrt{2t^2 + 8}},$$

ou seja,

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}} - 1 < \sqrt{2}t \frac{1 - N\left(\sqrt{2}t\right)}{n\left(\sqrt{2}t\right)} - 1 < \frac{4}{3 + \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}} - 1,$$

assim, para $t > 0$, segue que

$$\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}} < h(t) < \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}}{3 + \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}}. \tag{1.3}$$

Agora, note que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}} = \lim_{t \to \infty} \left[\left(\frac{1 - \left(1 + \frac{2}{t^2}\right)}{1 - \left(1 + \frac{4}{t^2}\right)} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Dessa forma,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}}}{\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}}{3 + \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}}} = \left(\lim_{t \to \infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}} \right) \left(\lim_{t \to \infty} \frac{3 + \sqrt{1 + \frac{4}{t^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{t^2}}} \right) = 1. \tag{1.4}$$

Sendo $1-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}<0$, segue de (1.3) e (1.4) que

$$1 < \frac{h(t)}{\frac{1-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}}{3+\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}}} < \frac{\frac{1-\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}}}{\frac{1-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}}{3+\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}}} \longrightarrow 1, \quad t\to\infty.$$

Logo,

$$h(t) \sim \frac{1-\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}}{3+\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}}, \quad t\to\infty,$$

como queríamos.

□

1.2 Máximo Domínio de Atração e Distribuições Max-estáveis

Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. não-degeneradas com f.d. comum F. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denote o máximo de $X_1, \cdots, X_n$ por

$$M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}.$$

Assim, a f.d. de M_n é dada por

$$P(M_n \leq x) = P(\max\{X_1, \cdots, X_n\} \leq x) = (F(x))^n = F^n(x).$$

Denote por $l(F) = \inf\{x; F(x) > 0\}$ e $r(F) = \sup\{x; F(x) < 1\}$ os pontos *extremo inferior* e *superior* de F, respectivamente.

Temos que

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \begin{cases} 0, & x < r(F), \\ 1, & x > r(F), \end{cases}$$

e, consequentemente, $M_n \overset{p}{\to} r(F)$, quando $n \to \infty$. Como $\{M_n\}$ é uma sequência não-decrescente, segue que $M_n \overset{q.c.}{\to} r(F)$, quando $n\to\infty$. Dessa forma, para obtermos uma distribuição limite não-degenerada é necessário normalizarmos M_n.

Na Teoria dos Valores Extremos, estamos interessados em estudar as possíveis f.d.'s H não-degeneradas para as quais

$$\lim_{n\to\infty} P\left(M_n \leq g_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(g_n(x)) = H(x), \quad \forall x \in C(H), \tag{1.5}$$

onde $\{g_n(x)\}$ é uma sequência de funções estritamente monótonas apropriadamente escolhidas. Neste caso, dizemos que H é uma *distribuição dos valores extremos* ou *distribuição limite extremal.*

Definição 1.1 *Seja H uma f.d. não-degenerada. Dizemos que F pertence ao* máximo domínio de atração *de H (escrevemos $F \in D(H)$) se existe $\{g_n(x)\}$ uma sequência de transformações estritamente monótonas tal que*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(g_n(x)) = H(x),$$

para todo $x \in C(H)$, em que $C(H)$ denota o conjunto dos pontos de continuidade de H.

Observação 1.1 *Na Definição 1.1, se*

(1) $g_n(x) = a_n x + b_n$, para $a_n \in \mathbb{R}$ e $b_n > 0$, dizemos que F pertence ao máximo domínio de atração linear *de H e denotamos por $F \in D_l(H)$;*

(2) $g_n(x) = \alpha_n |x|^{\beta_n} sign(x)$, para $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ e

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & se \quad x < 0, \\ 0, & se \quad x = 0, \\ 1, & se \quad x > 0, \end{cases}$$

dizemos que F pertence ao máximo domínio de atração sob normalização potência *de H e denotamos por $F \in D_p(H)$.*

Definição 1.2 *Dizemos que H é* max-estável *se para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma transformação contínua estritamente monótona $g_n(x)$ tal que*

$$H(x) = H^n(g_n(x)),$$

i.e., para cada n, $g_n^{-1}(M_n) \stackrel{d}{=} X$, em que X é uma v.a. com f.d. H.

Definição 1.3 *Dizemos que duas f.d. não-degeneradas G e H são do* mesmo tipo *se para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma transformação contínua estritamente monótona $g_n(x)$ tal que*

$$G(x) = H(g_n(x)).$$

Observação 1.2 *Assim como na Observação 1.1, nas Definições 1.2 e 1.3, se*

(1) $g_n(x) = a_n x + b_n$, para $a_n \in \mathbb{R}$ e $b_n > 0$, dizemos que F é l-max-estável *e que G e H são do* mesmo l-tipo;

(2) $g_n(x) = \alpha_n |x|^{\beta_n} sign(x)$, para $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ e

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & se \quad x < 0, \\ 0, & se \quad x = 0, \\ 1, & se \quad x > 0, \end{cases}$$

dizemos que F é p-max-estável *e que G e H são do* mesmo p-tipo.

Os próximos resultados associam as distribuições extremais, i.e, as f.d.'s H que satisfazem (1.5), com as distribuições max-estáveis. A prova destes resultados podem ser encontradas em Pantcheva [27].

Proposição 1.2 *Toda distribuição limite extremal tem a forma*

$$H(x) = \exp\left\{-e^{-h(x)}\right\}, \tag{1.6}$$

em que h é uma função contínua inversível.

Corolário 1.1 *Uma função de distribuição H é max-estável se, e somente se, H é uma distribuição limite extremal.*

1.3 Funções Regularmente Variantes

Nos próximos capítulos podemos ver que o estudo das possíveis distribuições limites do máximo normalizado, ou seja, as possíveis $H(x)$ que satisfazem (1.5), está intimamente relacionado com o estudo de funções regularmente variantes. Dessa forma, para conveniência do leitor, nesta seção apresentamos uma breve revisão de alguns importantes resultados dessas funções. Um estudo mais aprofundado de funções regularmente variantes pode ser encontrado em Seneta [34], Resnick [31].

A grosso modo, funções regularmente variantes são aquelas funções que tem comportamento assintótico como funções potências. A seguir apresentamos a definição de função regularmente variante.

Definição 1.4 *Dizemos que uma função mensurável $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é* regularmente variante *no ∞ com índice ρ (escrevemos $U \in RV_\rho$) se para $x > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho.$$

Se $\rho = 0$, então dizemos que U é lentamente variante *e escrevemos $U \in RV_0$.*

Denotamos as funções *lentamente variantes* por $L(x)$, ou seja, são funções $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tais que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Exemplo 1.4 *Temos que $U(x) = x^\rho \in RV_\rho$ e $L(x) = \log x \in RV_0$.*

De fato, para cada $x > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(tx)^\rho}{t^\rho} = x^\rho \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\log tx}{\log t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t + \log x}{\log t} = 1.$$

Agora, apresentamos algumas propriedades de funções regularmente variantes utilizadas nos capítulos seguintes.

Proposição 1.3 *(a) Seja $U \in RV_\rho$. Então $L(x) = x^{-\rho}U(x) \in RV_0$.*

(b) Seja $U \in RV_{-\rho}$. Então $1/U \in RV_\rho$.

A prova da Proposição 1.3 segue diretamente da Definição 1.4.

Proposição 1.4 (Convergência Uniforme) *Se $U \in RV_\rho$, então*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\rho,$$

uniformemente localmente em $(0,\infty)$. Se $\rho < 0$, então a convergência uniforme ocorre em intervalos da forma (b,∞), $b > 0$. Se $\rho > 0$, a convergência uniforme ocorre em intervalos $(0,b]$ desde que U seja limitada em $(0,b]$ para todo $b > 0$.

Proposição 1.5 (Representação de Karamata) *Uma função $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é lentamente variante se, e somente se, L pode ser representada como*

$$L(x) = c(x)\exp\left\{\int_1^x \varepsilon(t)t^{-1}dt\right\} \tag{1.7}$$

para $x > 0$ em que $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0,\infty)$ e $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$.

As provas das proposições 1.4 e 1.5 podem ser encontradas em Seneta [34]. Já as provas das duas proposições que apresentamos a seguir podem ser encontradas em Resnick [31] p.21-22 e p.23-25, respectivamente.

Proposição 1.6 *Suponha que $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é absolutamente contínua tal que*

$$U(t) = \int_0^t u(x)dx.$$

(i) Se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tu(t)}{U(t)} = \rho, \tag{1.8}$$

então $U \in RV_\rho$.

(ii) Se $U \in RV_\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, e u é monótona, então (1.8) é válida e, se $\rho \neq 0$, então $sign(\rho)u(t) \in RV_{\rho^{-1}}$.

Proposição 1.7 *(i) Se $U \in RV_\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, e $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ são tais que $0 < a_n \to \infty$, $0 < a'_n \to \infty$, $a_n \sim a'_n c$, $0 < c < \infty$, então $U(a_n) \sim c^\rho U(a'_n)$. Se $\rho \neq 0$ o resultado também ocorre para $c = 0$ ou ∞. Analogamente o resultado ocorre trocando sequências por funções.*

(ii) Suponha $U(t)$ não-decrescente, $U(\infty) = \infty$ e $U \in RV_\rho$, $0 \leq \rho \leq \infty$. Então $U^{\leftarrow} \in RV_{1/\rho}$.

Corolário 1.2 *Seja F uma f.d. tal que $1 - F \in RV_{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Então*

$$(1/(1-F))^{\leftarrow} \in RV_{1/\alpha}.$$

Prova.

Pela Proposição 1.3(b), $(1/(1-F)) \in RV_\alpha$. Note que $1/(1-F(t))$ é não-decrescente e $1/(1-F(\infty)) = \infty$, de forma que, pela Proposição 1.7(*ii*) obtemos que

$$(1/(1-F))^{\leftarrow} \in RV_{1/\alpha}.$$

$\square$

Finalizamos este capítulo apresentando a definição de função $\xi-$*super lentamente variante* que servirá como critério para a ocorrência de grandes desvios num dos casos discutidos no Capítulo 3. Para um estudo mais aprofundado sobre a importância dessa definição na teoria de grandes desvios de extremos ver Anderson [1] e Goldie e Smith [18].

Definição 1.5 *Seja $\xi(t)$ uma função não-decrescente com $\xi(\infty) = \infty$. Dizemos que uma função lentamente variante L é ξ-super lentamente variante (ξ-ssv) se*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t\xi^\delta(t)\right)}{L(t)} = 1$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$.

Capítulo 2

Teoria dos Valores Extremos

Neste capítulo, estudamos a Teoria dos Valores Extremos sob dois tipos de normalização. Na Seção 2.1 apresentamos os principais resultados da teoria clássica, sob normalização linear, que são utilizados nas provas de vários resultados apresentados no Capítulo 3, assim como exemplos de f.d.'s cujo máximo normalizado linearmente converge para uma das possíveis distribuições limites extremais. Além disso, apresentamos um exemplo de f.d. que não está no máximo domínio de atração de nenhuma das distribuições extremais sob normalização linear.

Na Seção 2.2 apresentamos a normalização do tipo potência, proposta por Pantcheva [27], de modo que se uma f.d. F pertence ao máximo domínio de atração linear de alguma das distribuições extremais clássicas, então F pertencerá ao máximo domínio de atração de alguma das distribuições extremais obtidas por esta nova normalização, mostrando assim que o domínio de atração da normalização do tipo potência é mais abrangente que o domínio de atração linear.

As principais referências utilizadas neste capítulo são: Resnick [31], Galambos [14], Pantcheva [27] e Mohan e Ravi [25].

2.1 Teoria dos Valores Extremos sob Normalização Linear

Seja, para cada $n \geq 1$,

$$M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\},$$

onde $X_1, \cdots, X_n$ são variáveis aleatórias i.i.d.com função de distribuição comum F.

A primeira proposição que apresentamos nesta seção estabelece as possíveis distribuições limites para o máximo normalizado linearmente.

Proposição 2.1 (Fisher e Tippett [13]) *Suponha que existam sequências reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ com $a_n > 0$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x), \tag{2.1}$$

fracamente, ou seja, para todo $x \in C(G)$, em que G é assumida não-degenerada. Então G é do mesmo l-tipo de uma das três classes a seguir:

(i)

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & se \quad x \geq 0, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$.

(ii)

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\}, & se \quad x < 0, \\ 1, & se \quad x \geq 0, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$.

(iii)

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Estas distribuições são chamadas ***Distribuições dos Valores Extremos sob normalização linear*** *e são conhecidas, respectivamente, como distribuição de* ***Fréchet***, ***Weibull*** *e* ***Gumbel***.

Prova. Ver Resnick [31] p.9-11.

Na Figura 2.1 podemos comparar as distribuições Φ_1, Ψ_1 e Λ. Utilizamos esta figura para avaliar a qualidade das convergências nos exemplos apresentados nesta seção.

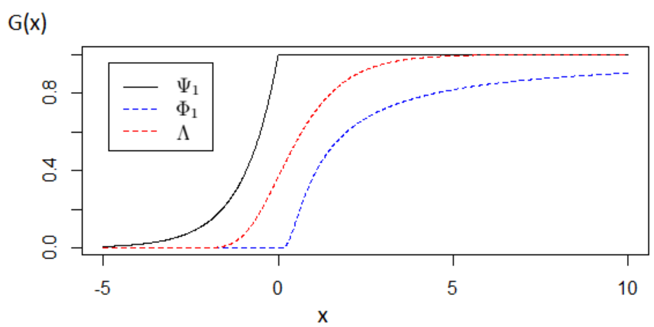


Figura 2.1: Distribuições dos Valores Extremos: Φ_1, Ψ_1 e Λ

Observe que a Proposição 2.1 nos garante que existem três tipos de distribuições dos valores extremos sob normalização linear. Agora, recordando a Definição

1.1, estamos interessados em determinar sob quais condições uma f.d. F pertence ao máximo domínio de atração linear $D_l(.)$ de cada distribuição limite extremal. A próxima proposição apresenta tais condições.

Proposição 2.2 (Critério para F pertencer a $D_l(G)$) *Seja $\alpha > 0$.*

(i) $F \in D_l(\Phi_\alpha)$ *se, e somente se,* $r(F) = \infty$ *e* $1 - F \in RV_{-\alpha}$. *Neste caso, podemos escolher as constantes de normalização* $a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$ *e* $b_n = 0$.

(ii) $F \in D_l(\Psi_\alpha)$ *se, e somente se,* $1 - F\left(r(F) - x^{-1}\right) \in RV_{-\alpha}$ *e* $r(F) < \infty$. *Neste caso, podemos tomar* $a_n = r(F) - F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$ *e* $b_n = r(F)$.

(iii) $F \in D_l(\Lambda)$ *se, e somente se, para algum* $a \in \mathbb{R}$, *temos*

$$\int_a^{r(F)} [1 - F(y)]dy < \infty,$$

e para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to r(F)} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \tag{2.2}$$

onde, para $l(F) < x < r(F)$,

$$f(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{r(F)} [1 - F(y)]dy. \tag{2.3}$$

Aqui, as sequências a_n *e* b_n *podem ser escolhidas como*

$$b_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) \quad e \quad a_n = f(b_n).$$

Prova. Ver Resnik [31] p.54, 59 e 28-30, respectivamente para (i), (ii) e (iii).

Na observação a seguir, destacamos uma parte da prova da Proposição 2.2(iii), que utilizaremos na teoria de grandes desvios dos extremos apresentada no Capítulo 3.

Observação 2.1 *Suponha a validade de (2.2) da Proposição 2.2(iii). Então temos* $1 - F(b_n) \sim 1/n$, *quando* $n \to \infty$.

De fato, primeiramente recordamos que se $y < F^{\leftarrow}(x)$, *então* $F(y) < x$. *Outra propriedade da inversa generalizada é que* $F(F^{\leftarrow}(y)) \geq y$.

Seja $\varepsilon > 0$ *arbitrário. Então* $b_n - \varepsilon a_n < b_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$ *e, consequentemente,*

$$F(b_n - \varepsilon a_n) < 1 - \frac{1}{n}\cdot$$

Temos ainda que

$$F(b_n) = F\left(F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \geq 1 - \frac{1}{n}\cdot$$

Dessa forma,

$$1 - F(b_n) \leq \frac{1}{n} < 1 - F(b_n - \varepsilon a_n),$$

donde segue que

$$\frac{1 - F(b_n)}{1 - F(b_n - \varepsilon a_n)} < n[1 - F(b_n)] \leq 1.$$

Por (2.2), segue que

$$e^{\varepsilon} \leq \liminf n[1 - F(b_n)] \leq \limsup n[1 - F(b_n)] \leq 1.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ *arbitrário, segue que* $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(b_n)) = 1$.

A seguir, utilizando a Proposição 2.2, apresentamos três exemplos de f.d.'s cujo máximo normalizado linearmente converge para uma das distribuições dos valores extremos.

Exemplo 2.1 (Distribuição de Cauchy) *Seja*

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então $F \in D_l(\Phi_1)$ *e através da Figura 2.2 podemos visualizar esta convergência para* $n \in \{5, 10, 15\}$.

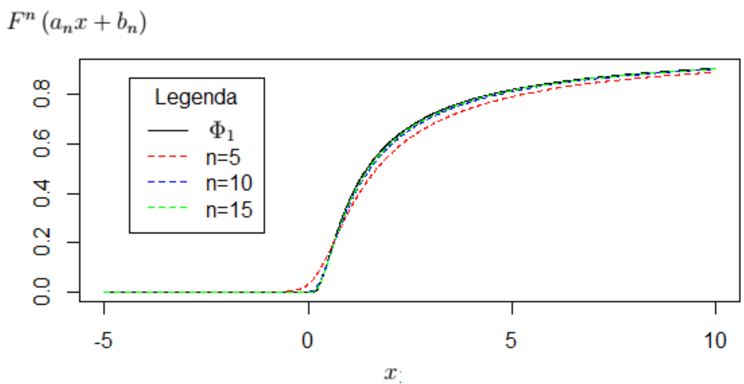


Figura 2.2: Convergência da distribuição Cauchy para Φ_1

De fato, note que $r(F) = \infty$ *e, para* $x > 0$*, aplicando a regra L'Hopital, temos que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\arctan(tx)}{\pi}}{\frac{1}{2} + \frac{\arctan(t)}{\pi}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(1 + t^2)x}{1 + (tx)^2} = x^{-1}.$$

Logo, $1 - F \in RV_{-1}$ *e, pela Proposição 2.2(i), segue que* $F \in D_l(\Phi_1)$*. Temos ainda* *que as constantes de normalização podem ser tomadas como sendo*

$$a_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) \quad e \quad b_n = 0.$$

Exemplo 2.2 (Distribuição Uniforme) *Considere uma v.a. X com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$, ou seja, a f.d. de X é dada por*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0, \\ x, & se \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & se \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Então $F \in D_l(\Psi_1)$ e através da Figura 2.3 podemos avaliar a convergência do máximo normalizado para diferentes valores de n.

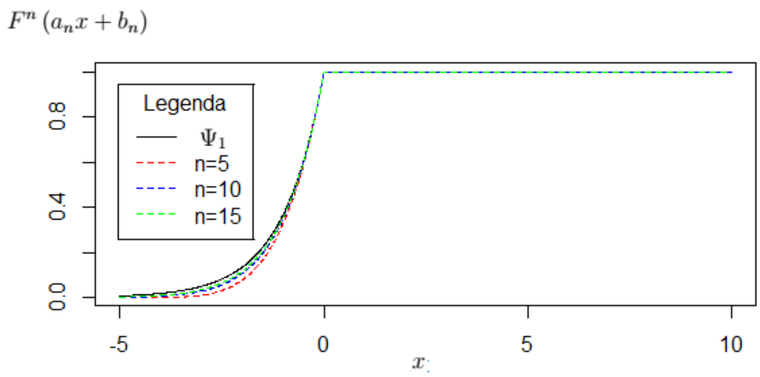


Figura 2.3: Convergência da distribuição Uniforme $[0,1]$ para Ψ_1

De fato, seja

$$F^*(x) = F\left(r(F) - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 1.$$

Para $x > 0$ temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F^*(tx)}{1 - F^*(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{tx} = x^{-1}.$$

Logo $1 - F^* \in RV_{-1}$. Sendo $r(F) = 1 < \infty$, pela Proposição 2.2(ii), temos que $F \in D_l(\Psi_1)$. Além disso, as constantes de normalização podem ser tomadas por

$$a_n = r(F) - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad e \quad b_n = 1.$$

No próximo exemplo apresentamos uma família de distribuições com ponto extremo superior infinito e que, aplicando a Proposição 2.2(iii), o máximo normalizado linearmente converge para Λ. Um exemplo de f.d. $F \in D_l(\Lambda)$ com ponto extremo superior $r(F) < \infty$ pode ser encontrado em Embrechts [9] p.157.

Exemplo 2.3 (Distribuição Exponencial) *Seja*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Então $F \in D_l(\Lambda)$. Em particular, quando $\lambda = 1$, na Figura 2.4 podemos visualizar a aproximação de $F^n(a_n x + b_n)$ e $\Lambda(x)$ para diferentes valores de n.

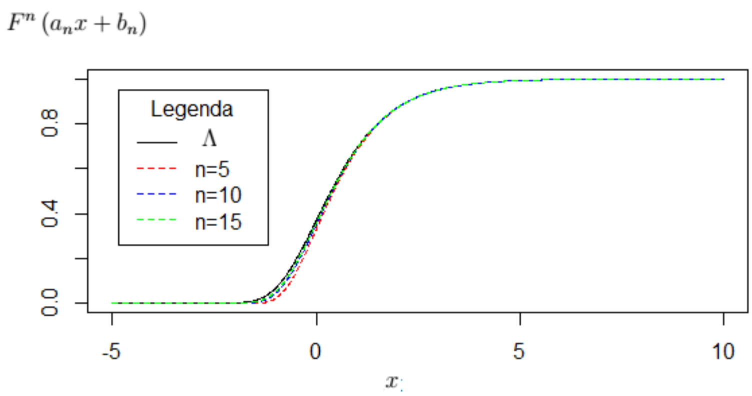


Figura 2.4: Convergência da distribuição Exponencial(λ) para Λ

De fato, para $t > 0$, temos que

$$\int_t^{r(F)} [1 - F(y)]dy = \int_t^{\infty} e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} < \infty.$$

Assim, definindo, para $t > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{r(F)} [1 - F(y)]dy = \frac{1}{e^{-\lambda t}} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda},$$

temos

$$\lim_{t \to r(F)} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{1 - F\,(t + x/\lambda)}{1 - F(t)} = \lim_{t \to \infty} \exp\{-\lambda(t + x/\lambda - t)\} = e^{-x}.$$

Logo, pela Proposição 2.2(iii), segue que $F \in D_l(\Lambda)$. As constantes de normalização podem ser escolhidas como

$$b_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) = \frac{1}{\lambda} \log n \quad e \quad a_n = f(b_n) = \frac{1}{\lambda}.$$

Agora, apresentamos um exemplo de f.d. cujo máximo normalizado linearmente não converge para nenhuma das distribuições extremais.

Exemplo 2.4 *Seja*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < e, \\ 1 - \frac{1}{\log x}, & se \quad x \geq e. \end{cases}$$

Então $F \notin D_l(G)$, para $G = \Phi_\alpha$ ou $G = \Psi_\alpha$ ou $G = \Lambda$.

De fato, sendo $r(F) = \infty$, pela Proposição 2.2, se $F \in D_l(G)$, então $G = \Phi_\alpha$ ou $G = \Lambda$.

Para $x > 0$, por L'Hopital,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\log t}{\log(tx)} = 1.$$

Logo, $1 - F \in RV_0$ e, assim, $F \notin D_l(\Phi_\alpha)$, $\alpha > 0$.

Temos ainda que

$$\int_e^\infty [1 - F(y)]dy = \int_e^\infty \frac{1}{\log y} dy = \lim_{A \to \infty} \int_e^A \frac{1}{\log(y)} dy \geq \lim_{A \to \infty} \frac{A - e}{\log A} = \infty, \tag{2.4}$$

de modo que, pela Proposição 2.2(iii), $F \notin D_l(\Lambda)$.

Para finalizar a seção apresentamos uma caracterização alternativa do domínio de atração da distribuição Gumbel utilizando o conceito de f.d. *de Von Mises* que definimos a seguir.

Definição 2.1 *Chamamos de* **função de Von Mises** *a toda f.d. F, com ponto extremo superior $r(F)$, para a qual existe $z_0 < r(F)$ tal que para $z_0 < x < r(F)$ e $c > 0$*

$$1 - F(x) = c \exp\left\{ - \int_{z_0}^x \frac{1}{f(u)} du \right\}, \tag{2.5}$$

em que $f(u) > 0$, $z_0 < u < r(F)$ e f é absolutamente contínua em $(z_0, r(F))$ com densidade $f'(u)$ e $\lim_{u \uparrow r(F)} f'(u) = 0$. Chamamos f de **função auxiliar.**

Proposição 2.3 *(a) Se F é uma função de Von Mises com representação (2.5), então $F \in D_l(\Lambda)$. As constantes de normalização podem ser tomadas como*

$$b_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) \quad e \quad a_n = f(b_n).$$

(b) Suponha que F é absolutamente contínua com segunda derivada F'' negativa para todo $x \in (z_0, r(F))$. Se

$$\lim_{x \uparrow r(F)} \frac{F''(x)(1 - F(x))}{(F'(x))^2} = -1, \tag{2.6}$$

então F é uma função de Von Mises e, consequentemente, $F \in D_l(\Lambda)$. Podemos tomar $f = (1 - F)/F'$. Reciprocamente, uma função de Von Mises duas vezes diferenciável satisfaz (2.6).

Prova. Ver Resnick [31] p. 42.

A demonstração da Proposição 2.3 faz uso de dois lemas. Enunciamos a seguir o primeiro lema, pois nos permitirá conhecer o comportamento assintótico de $a_n x + b_n$, quando $n \to \infty$, e este resultado nos auxiliará na teoria dos grandes desvios apresentada no Capítulo 3.

Lema 2.1 *Considere a função auxiliar f como na Definição 2.1.*

(a) Se $r(F) = \infty$, então $\lim_{t\to\infty} t^{-1} f(t) = 0$.

(b) Se $r(F) < \infty$, então $f(r(F)) = \lim_{t\uparrow r(F)} f(t) = 0$ e $\lim_{t\uparrow r(F)}(r(F) - t)^{-1} f(t) = 0$.

Em ambos os casos,

$$\lim_{t\uparrow r(F)} (t + xf(t)) = r(F)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observe que, pela Proposição 2.3, podemos tomar $b_n = F^{\leftarrow}(1-1/n) \to r(F)$ e $a_n = f(b_n)$. Como consequência do Lema 2.1, temos que

$$b_n + a_n x = b_n + xf(b_n) \to r(F), \quad n \to \infty, \tag{2.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado caracteriza o domínio de atração linear da distribuição Gumbel como sendo as funções de distribuição de Von Mises ou as que possuem cauda assintoticamente equivalentes à alguma função de Von Mises.

Proposição 2.4 (Balkema e de Haan [2]) *$F \in D_l(\Lambda)$ se, e somente se, existe uma função de Von Mises G tal que para $x \in (z_0, r(F))$*

$$1 - F(x) = c(x)(1 - G(x)) = c(x) \exp\left\{ - \int_{z_0}^{x} \frac{1}{f(u)} du \right\} \tag{2.8}$$

e

$$\lim_{x\to r(F)} c(x) = c > 0,$$

em que z_0 é o mesmo da Definição 2.1.

Prova. Ver Proposição 1.4 de Resnick [31].

Finalizamos apresentando um exemplo de aplicação da Proposição 2.3 no caso da distribuição normal padrão.

Exemplo 2.5 *Considere $N(t)$ a f.d. normal padrão e com respectiva densidade de probabilidade*

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Então $N \in D_l(\Lambda)$ com constantes de normalização $a_n = (2\log n)^{-1/2}$ e $b_n \sim (2\log n)^{1/2}$. De fato, pela prova do Lema 1.1, temos que

$$N''(t) = n'(t) = -tn(t),$$

e

$$1 - N(t) \sim t^{-1} n(t), \quad t \to \infty.$$

Além disso, N possui segunda derivada negativa para todo $t > 0$. Assim,

$$\lim_{t \uparrow r(N)} \frac{N''(t)(1-N(t))}{(N'(t))^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{-tn(t)(1-N(t))}{(n(t))^2} = -\lim_{t \to \infty} \frac{1-N(t)}{t^{-1}n(t)} = -1.$$

Pela Proposição 2.3(b), segue que N é uma função de Von Mises e, consequentemente, $N \in D_l(\Lambda)$. Mais ainda, podemos tomar

$$f(t) = \frac{1-N(t)}{n(t)} \sim t^{-1}\frac{n(t)}{n(t)} = t^{-1}, \quad t \to \infty. \tag{2.9}$$

Para a prova da escolha das constantes de normalização ver Resnick [31] p.71-72.

2.2 Teoria dos Valores Extremos sob Normalização Potência

Iniciamos esta seção motivando a construção da normalização do tipo potência, assumindo a convergência do máximo normalizado linearmente.

Sejam $X_1, X_2, \cdots$ v.a.'s i.i.d. com distribuição comum F tais que $X_j > 0$ para $j = 1, 2, \cdots$ e

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \quad \forall x \in C(H), \tag{2.10}$$

para apropriadas constantes $a_n, b_n > 0$ e uma f.d. não-degenerada H. Defina $Y_j = e^{X_j}$, $j = 1, 2, \cdots$, e $M'_n = \max\{Y_1, \cdots, Y_n\}$.

Note que,

$$M_n = \max\{X_1, \cdots X_n\} = \max\{\log Y_1, \cdots, \log Y_n\} = \log M'_n,$$

em que a última igualdade ocorre devido a função logaritmo ser crescente.

Considerando $y = e^x$ e $b'_n = e^{b_n}$, temos que

$$\begin{aligned} P(M_n \le a_n x + b_n) &= P\big(\log M'_n \le a_n \log y + \log b'_n\big) \\ &= P\big(\log M'_n \le \log(b'_n y^{a_n})\big) \\ &= P(M'_n \le b'_n y^{a_n}) \\ &= P(M'_n \le b'_n |y|^{a_n} sign(y)), \end{aligned} \tag{2.11}$$

em que

$$sign(y) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad y < 0, \\ 0, & \text{se} \quad y = 0, \\ 1, & \text{se} \quad y > 0. \end{cases}$$

De forma análoga, considerando $X_j < 0$ e definindo $Y_j = -e^{-X_j}$, obtemos que

$$\begin{aligned} M_n &= \max\{X_1, \cdots, X_n\} \\ &= \max\{-\log(-Y_1), \cdots, -\log(-Y_n)\} \\ &= -\min\{\log(-Y_1), \cdots, \log(-Y_n)\} \\ &= -\log(\min\{-Y_1, \cdots, -Y_n\}) \\ &= -\log(-M'_n), \end{aligned}$$

em que a quarta igualdade ocorre devido a função logaritmo ser crescente. Dessa forma, podemos considerar $b'_n = e^{-b_n}$ e $y = -e^{-x}$ para obter

$$\begin{aligned} P(M_n \le a_n x + b_n) &= P\big(-\log(-M'_n) \le a_n(-\log(-y)) - \log b'_n\big) \\ &= P\big(\log(-M'_n) \ge a_n \log(|y|) + \log b'_n\big) \\ &= P(-M'_n \ge b'_n |y|^{a_n}) \\ &= P(M'_n \le b'_n |y|^{a_n} sign(y)). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por (2.11) e (2.12), torna-se natural tentarmos estender a normalização linear através de transformações estritamente monótonas da forma

$$g_n(x) = \alpha_n |x|^{\beta_n} sign(x).$$

Em outras palavras, considerando $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. com distribuição comum F, estamos interessados em determinar quais as possíveis f.d.'s (não-degeneradas) H para as quais existem sequências de constantes $\alpha_n > 0$ e $\beta_n > 0$, $n \ge 1$, tais que

$$\lim_{n\to\infty} P\big(M_n \le \alpha_n |x|^{\beta_n} sign(x)\big) = H(x), \quad \forall x \in C(H).$$

Tal normalização foi chamada por Pantcheva [27] de *normalização potência* e as possíveis f.d.'s H são apresentadas no resultado a seguir.

Proposição 2.5 (Pantcheva [27]) *Suponha que existam sequências de números reais* $\{\alpha_n\}$ *e* $\{\beta_n\}$ *com* $\alpha_n, \beta_n > 0$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} F^n\left(\alpha_n|x|^{\beta_n} sign(x)\right) = H(x), \tag{2.13}$$

fracamente, em que H é f.d. não-degenerada. Então H é do mesmo p-tipo de uma das seis classes a seguir:

(a)

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 1, \\ \exp\{-(\log x)^{-\alpha}\}, & se \quad x \geq 1, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$.

(b)

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0, \\ \exp\{-(-\log x)^{\alpha}\}, & se \quad 0 \leq x < 1, \\ 1, & se \quad x \geq 1, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$.

(c)

$$H_{3,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < -1, \\ \exp\{-(-\log(-x))^{-\alpha}\}, & se \quad -1 \leq x < 0, \\ 1, & se \quad x \geq 0, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$.

(d)

$$H_{4,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp\{-(\log(-x))^{\alpha}\}, & se \quad x < -1, \\ 1, & se \quad x \geq -1, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$.

(e)

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0, \\ \exp\{-x^{-1}\} & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$

(f)

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) = \begin{cases} \exp\{x\}, & se \quad x < 0, \\ 1 & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Estas distribuições são chamadas Distribuições dos Valores Extremos sob normalização potência *e são conhecidas, respectivamente, como distribuição de* log-Fréchet, log-Weibull, log-Fréchet inversa, log-Weibull inversa, Fréchet padrão *e* Weibull padrão.

Prova. Ver Pantcheva [27].

O resultado a seguir fornece um critério para uma f.d. F pertencer ao máximo domínio de atração de cada f.d. extremal sob normalização potência. Este resultado, proposto por Mohan e Ravi [25], será essencial para as demonstrações dos principais resultados apresentados no Capítulo 3 referentes à teoria de grandes desvios de extremos sob normalização potência.

Proposição 2.6 (Mohan e Ravi [25]) *Critério para F pertencer a $D_p(H)$:*

(a) $F \in D_p(H_{1,\alpha})$ *se, e somente se,* $r(F) = \infty$ *e* $1 - F(e^x) \in RV_{-\alpha}$. *Neste caso, podemos escolher as constantes de normalização* $\alpha_n = 1$ *e* $\beta_n = \log F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$.

(b) $F \in D_p(H_{2,\alpha})$ *se, e somente se,* $0 < r(F) < \infty$ *e* $1 - F(r(F)\exp\{-1/x\}) \in RV_{-\alpha}$. *Aqui, podemos tomar* $\alpha_n = r(F)$ *e* $\beta_n = \log(r(F)/F^{\leftarrow}(1 - 1/n))$.

(c) $F \in D_p(H_{3,\alpha})$ *se, e somente se,* $r(F) = 0$ *e* $1 - F(-e^{-x}) \in RV_{-\alpha}$. *As constantes de normalização podem ser escolhidas como* $\alpha_n = 1$ *e* $\beta_n = -\log(-F^{\leftarrow}(1 - 1/n))$.

(d) $F \in D_p(H_{4,\alpha})$ *se, e somente se,* $r(F) < 0$ *e* $1 - F(r(F)\exp\{1/x\}) \in RV_{-\alpha}$. *Aqui, podemos tomar* $\alpha_n = -r(F)$ *e* $\beta_n = \log(F^{\leftarrow}(1 - 1/n)/r(F))$.

(e) $F \in D_p(\Phi)$ *se, e somente se,* $r(F) > 0$ *e*

$$\lim_{t \uparrow r(F)} \frac{1 - F(t\exp\{xf(t)\})}{1 - F(t)} = e^{-x}, \quad x > 0. \tag{2.14}$$

Se esta condição é válida para alguma f, *então*

$$\int_a^{r(F)} \frac{1 - F(x)}{x} dx < \infty$$

para algum $0 < a < r(F)$ *e a condição ocorre com a escolha*

$$f(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{r(F)} \frac{1 - F(x)}{x} dx. \tag{2.15}$$

As constantes de normalização podem ser escolhidas como $\alpha_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$ *e* $\beta_n = f(\alpha_n)$.

(f) $F \in D_p(\Psi)$ *se, e somente se,* $r(F) \leq 0$ *e*

$$\lim_{t \uparrow r(F)} \frac{1 - F\left(t\exp\{xf(t)\}\right)}{1 - F(t)} = e^{x}, \quad x < 0. \tag{2.16}$$

Se esta condição é válida para alguma f, *então*

$$-\int_a^{r(F)} \frac{1 - F(x)}{x} dx < \infty$$

para algum $a < r(F)$ e a condição ocorre com a escolha

$$f(t) = -\frac{1}{1-F(t)} \int_t^{r(F)} \frac{1-F(x)}{x} dx. \tag{2.17}$$

As constantes de normalização podem ser escolhidas como $\alpha_n = -F^{\leftarrow}(1-1/n)$ e $\beta_n = f(-\alpha_n)$.

Prova. Ver Mohan e Ravi [25] p.634-636.

Observação 2.2 *Para cada $i = 1, \cdots, 4$, se $F \in D_p(H_{i,\alpha})$, então podemos definir uma função F^* de modo que $1 - F^* \in RV_{-\alpha}$. Além disso, se definirmos uma f.d. G por*

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ F^*(x), & x \geq 0, \end{cases}$$

então $1 - G \in RV_{-\alpha}$ e $r(G) = \infty$, de modo que pela Proposição 2.2(i), $G \in D_l(\Phi_\alpha)$. Mais ainda, para cada $i = 1, \cdots, 4$, podemos definir uma função lentamente variante $L \in RV_0$ por

$$L(x) = x^\alpha(1 - F^*(x)).$$

Além de caracterizar os domínios de atração das distribuições extremais sob normalização potência, Mohan e Havi [25] provaram um resultado no qual é possível garantir que toda f.d. F que esteja no máximo domínio de atração de alguma distribuição extremal clássica (ou seja, sob normalização linear) implica que F está no máximo domínio de atração de alguma distribuição extremal sob normalização potência. Este resultado é apresentado a seguir.

Proposição 2.7 (Mohan e Ravi [25]) *As seguintes afirmações são válidas para uma f.d. F:*

(a) (a1) Se $F \in D_l(\Phi_\alpha)$, então $F \in D_p(\Phi)$.
(a2) Se $F \in D_l(\Lambda)$ com $r(F) = \infty$, então $F \in D_p(\Phi)$.
(a3) $F \in D_l(\Lambda)$ com $0 < r(F) < \infty$ se, e somente se, $F \in D_p(\Phi)$ com $r(F) < \infty$.

(b) (b1) $F \in D_l(\Lambda)$ com $r(F) < 0$ se, e somente se, $F \in D_p(\Psi)$ com $r(F) < 0$.
(b2) Se $F \in D_l(\Lambda)$ com $r(F) = 0$, então $F \in D_p(\Psi)$.
(b3) Se $F \in D_l(\Psi_\alpha)$ com $r(F) = 0$, então $F \in D_p(\Psi)$.

(c) $F \in D_l(\Psi_\alpha)$ com $r(F) > 0$ se, e somente se, $F \in D_p(H_{2,\alpha})$.

(d) $F \in D_l(\Psi_\alpha)$ com $r(F) < 0$ se, e somente se, $F \in D_p(H_{4,\alpha})$.

Prova. Ver Mohan e Ravi [25] p.636-638.

Pela Proposição 2.7 garantimos que toda f.d. cujo máximo normalizado linearmente converge para uma f.d. não-degenerada implica na convergência do máximo sob normalização potência. A seguir, recordamos o Exemplo 2.4 apresentado na Seção 2.1 de uma f.d. cujo máximo normalizado linearmente não converge fracamente, e mostramos que o máximo estabilizado sob a normalização potência possui uma distribuição limite não-degenerada. Em outras palavras, este exemplo indica que os domínios de atração sob a normalização potência são mais abrangentes do que os domínios de atração linear. Além disso, apresentamos um exemplo de f.d. em que o máximo não converge sob a normalização potência, mostrando que ainda é possível questionar sobre a existência de uma função de estabilização do máximo cujos domínios de atração das distribuições extremais atraem mais que $D_p(.)$.

Exemplo 2.6 *Considere F como no Exemplo 2.4, ou seja,*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < e, \\ 1 - \frac{1}{\log x}, & se \quad x \geq e. \end{cases}$$

Então $F \in D_p(H_{1,1})$ com $\alpha_n = 1$ e $\beta_n = n$, mas, conforme vimos no Exemplo 2.4, $F \notin D_l(G)$, para $G = \Phi_\alpha$, $G = \Psi_\alpha$ ou $G = \Lambda$.

De fato, sendo $r(F) = \infty$, basta observarmos que, para $x > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(e^{tx})}{1 - F(e^t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{tx} = x^{-1},$$

assim, $1 - F(e^t) \in RV_{-1}$ e, segue da Proposição 2.6(a) que, $F \in D_p(H_{1,1})$.

O próximo exemplo garante que existe uma f.d. cujo máximo estabilizado pela normalização potência não converge para nenhuma das seis distribuições extremais.

Exemplo 2.7 *Seja*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < e^e, \\ 1 - \frac{1}{\log \log x}, & x \geq e^e. \end{cases}$$

Então $F \notin D_p(H)$ para nenhuma H Distribuições dos Valores Extremos sob normalização potência.

Temos que

$$r(F) = \sup\{x; F(x) < 1\} = +\infty.$$

Pela Proposição 2.6, basta mostrarmos que F não pertence $D_p(H_{1,\alpha})$ e nem $D_p(\Phi)$. De fato, se $x > e^e$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(\exp\{tx\})}{1 - F(\exp\{t\})} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log\log\exp\{t\}}{\log\log\exp\{tx\}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{\log tx} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{x}{tx}} = 1,$$

em que para a terceira igualdade aplicamos a regra L'Hopital para resolver uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. *Dessa forma,* $1 - F(e^t) \notin RV_{-\alpha}$ *para nenhum* $\alpha > 0$ *e, consequentemente,* $F \notin D_l(H_{1,\alpha})$.

Agora, observe que por (2.4) do Exemplo 2.4, obtemos que

$$\int_{e^e}^{r(F)} \frac{1 - F(x)}{x} dx = \int_{e^e}^{\infty} \frac{1}{x \log \log x} dx = \int_{e}^{\infty} \frac{1}{\log y} dy = \infty.$$

Logo $F \notin D_p(\Phi)$.

Finalizaremos a seção com dois exemplos de f.d.'s que pertencem ao domínio de atração do máximo sob normalização potência de Φ e Ψ, respectivamente, e que serão retomados no Capítulo 4.

Exemplo 2.8 *Seja*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 1, \\ 1 - \exp\left\{-\log^2 x\right\}, & se \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Então $F \in D_p(\Phi)$ *com* $a_n = \exp\{\sqrt{\log n}\}$ *e* $b_n = 1/(2\sqrt{\log n})$.

Pela caracterização de $D_p(\Phi)$ *dada na Proposição 2.6(e), como*

$$r(F) = \sup\{x \in \mathbb{R}; F(x) < 1\} = +\infty,$$

basta mostrarmos a validade de (2.14). Note que, para $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{t}^{r(F)} \frac{1 - F(x)}{x} dx &= \int_{t}^{\infty} \frac{\exp\{-\log^2 x\}}{x} dx \\ &= \sqrt{\pi} \int_{\sqrt{2}\log t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dz \\ &= \sqrt{\pi}\left(1 - N\left(\sqrt{2}\log t\right)\right), \end{aligned}$$

em que na segunda igualdade fizemos a substituição $z = \sqrt{2}\log x$ *e na terceira* N *é a f.d. de uma v.a. com distribuição* $N(0,1)$. *Assim, para* $t \geq 1$, *por (2.15), definimos*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{1 - F(t)} \int_{t}^{r(F)} \frac{1 - F(x)}{x} dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\exp\{-\log^2 t\}} \left(1 - N\left(\sqrt{2}\log t\right)\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Por (2.18) e fazendo a substituição $y = \sqrt{2}\log t$, *obtemos que*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\exp\{-\log^2 t\}}\left(1 - N\left(\sqrt{2}\log t\right)\right) \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-y^2/2\}}\left(1 - N(y)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{y\to\infty}\frac{1-N(y)}{N'(y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{y\to\infty}\frac{y^{-1}N'(y)}{N'(y)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

em que na penúltima igualdade utilizamos o Lema 1.1(i), ou seja, $1 - N(y) \sim y^{-1}N'(y)$ *quando* $y \to \infty$. *Dessa forma,*

$$\lim_{t\to\infty} f^2(t) = 0. \tag{2.19}$$

Novamente fazendo a substituição $y = \sqrt{2}\log t$ *e aplicando o Lema 1.1(i) obtemos*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} f(t)\log t &= \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}\left(1 - N\left(\sqrt{2}\log t\right)\right)}{\exp\{-\log^2 t\}}\log t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{y\to\infty}\frac{1-N(y)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\{-y^2/2\}}y \\
&= \frac{1}{2}\lim_{y\to\infty}\frac{1-N(y)}{y^{-1}N'(y)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1 - F(t\exp(yf(t)))}{1 - F(t)} &= \frac{\exp\left\{-\left[\log(t\exp\{yf(t)\})\right]^2\right\}}{\exp\{-\log^2 t\}} \\
&= \exp\left\{-[\log t + yf(t)]^2 + \log^2 t\right\} \\
&= \exp\left\{-2yf(t)\log t - y^2 f^2(t)\right\} \\
&= \exp\left\{-y[2f(t)\log t + yf^2(t)]\right\}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pela continuidade da função exponencial, por (2.19), (2.20) e (2.21), segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow r(F)} \frac{1 - F(t\exp(yf(t)))}{1 - F(t)} &= \exp\left\{-y\lim_{t\to\infty}[2f(t)\log t + yf^2(t)]\right\} \\
&= e^{-y}.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.6(e), $F \in D_p(\Phi)$.

Exemplo 2.9 *Seja*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - \exp\{-\sqrt{-log(-x)}\}, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Então $F \in D_p(\Psi)$ com $\alpha_n = -\log^2 n$ e $\beta_n = 2\log n$.

De fato, como $r(F) = \sup\{x \in \mathbb{R}; F(x) < 1\} = 0$, pela caracterização de $D_p(\Psi)$, dada na Proposição 2.6(f), basta mostrarmos a validade de (2.16).

Primeiramente, note que para $-1 \leq t < 0$,

$$\begin{aligned} \int_t^{r(F)} \frac{1-F(x)}{x} dx &= \int_t^0 \frac{\exp\{-\sqrt{-\log(-x)}\}}{x} dx \\ &= -\int_{-log(-t)}^{\infty} \exp\{-\sqrt{y}\} dy \\ &= -2\int_{\sqrt{-\log(-t)}}^{\infty} z e^{-z} dz, \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que na segunda igualdade utilizamos a transformação $y = -log(-x)$ e na última igualdade $z = \sqrt{y}$.

Por integração por partes em (2.22), fazendo $u = z$ e $dv = e^{-z}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_t^{r(F)} \frac{1-F(x)}{x} dx &= -2\left[-ze^{-z} + \int e^{-z} dz\right]_{z=\sqrt{-\log(-t)}}^{\infty} \\ &= 2\left[e^{-z}(z+1)\right]_{z=\sqrt{-\log(-t)}}^{\infty} \\ &= 2\left[\lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{e^N} - \exp\left\{-\sqrt{-\log(-t)}\right\}\left(1+\sqrt{-\log(-t)}\right)\right] \\ &= -2\exp\left\{-\sqrt{-\log(-t)}\right\}\left(1+\sqrt{-\log(-t)}\right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde na última igualdade utilizamos a regra L'Hopital na indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Segue de (2.17) e (2.23) que, para $-1 \leq t < 0$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{-1}{1-F(t)} \int_t^{r(F)} \frac{1-F(x)}{x} dx \\ &= \frac{-1}{\exp\{-\sqrt{-\log(-t)}\}}\left[-2\exp\left\{-\sqrt{-\log(-t)}\right\}\left(1+\sqrt{-\log(-t)}\right)\right] \\ &= 2\left(1+\sqrt{-\log(-t)}\right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow r(F)} \frac{1-F(t\exp\{yf(t)\})}{1-F(t)} &= \lim_{t\uparrow 0} \frac{\exp\left\{-\sqrt{-\log[-t\exp\{yf(t)\}]}\right\}}{\exp\left\{-\sqrt{-\log(-t)}\right\}} \\
&= \lim_{t\uparrow 0} \exp\left\{-\sqrt{-\left(\log(-t)+\log\exp\{yf(t)\}\right)}+\sqrt{-\log(-t)}\right\} \\
&= \lim_{t\uparrow 0} \exp\left\{-\sqrt{-\left[\log(-t)+yf(t)\right]}+\sqrt{-\log(-t)}\right\}. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.24) em (2.25), fazendo a substituição $z = \sqrt{-\log(-t)}$ *e usando a continuidade da função exponencial, segue que*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow r(F)} \frac{1-F(t\exp\{yf(t)\})}{1-F(t)} &= \lim_{t\uparrow 0} \frac{\exp\left\{-\sqrt{-\left[\log(-t)+2y\left(1+\sqrt{-\log(-t)}\right)\right]}\right\}}{\exp\left\{-\sqrt{-\log(-t)}\right\}} \\
&= \lim_{z\to\infty} \exp\left\{-\sqrt{z^2-2y(1+z)}+z\right\} \\
&= \exp\left\{-\lim_{z\to\infty} z\left(\sqrt{1-\frac{2y}{z}-\frac{2y}{z^2}}-1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{-\lim_{z\to\infty} \frac{1}{1/z}\left(\sqrt{1-\frac{2y}{z}-\frac{2y}{z^2}}-1\right)\right\}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Note que em (2.26) temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$*, de modo que aplicando L'Hopital obtemos*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\uparrow r(F)} \frac{1-F(t\exp\{yf(t)\})}{1-F(t)} &= \exp\left\{-\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-1/z^2)} \frac{\frac{2y}{z^2}+\frac{4y}{z^3}}{2\sqrt{1-\frac{2y}{z}-\frac{2y}{z^2}}}\right\} \\
&= \exp\left\{-\lim_{z\to\infty} \frac{-2z^2\left(\frac{y}{z^2}+\frac{2y}{z^3}\right)}{2\sqrt{1-\frac{2y}{z}-\frac{2y}{z^2}}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left\{-\lim_{z\to\infty} \frac{-\left(y+\frac{y}{z}\right)}{\sqrt{1-\frac{2y}{z}-\frac{2y}{z^2}}}\right\} \\
&= e^y.
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.6(f), $F \in D_p(\Psi)$*.*

Capítulo 3

Grandes Desvios de Extremos sob Normalização Linear

Neste capítulo, estudamos a propriedade de Grandes Desvios de Extremos para a sequência de máximos $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$, $n \geq 1$, de v.a.'s i.i.d sob normalização linear. O estudo apresentado é baseado em Resnick [31], Anderson [1], Goldie e Smith [18] e de Haan e Hordijk [20].

Considere uma f.d. F tal que $F \in D_l(G)$, ou seja, para a qual existem sequências de números reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, com $a_n > 0$, tais que para todo $x \in C(G)$

$$\lim_{n\to\infty} F^n\left(a_n x + b_n\right) = G(x), \tag{3.1}$$

onde, pela Proposição 2.1, G é do mesmo l-tipo de uma das distribuições extremais Φ_α, Ψ_α ou Λ.

No contexto estatístico, dada uma amostra aleatória $(X_1, \cdots, X_n)$ de F, sendo F desconhecida, por (3.1), podemos utilizar G para aproximar a distribuição do máximo $M_n = (X_1, \cdots, M_n)$, ou seja, para n suficientemente grande temos

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \approx G\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) \cdot \tag{3.2}$$

Considerando que a convergência em (3.1) ocorre uniformemente em $\mathbb{R}$, então temos

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| F^n(x) - G\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right)\right| \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

e d_n seria uma forma de medir quão boa é a aproximação em (3.2).

No entanto, se estamos interessados na cauda de M_n, ou seja, $P(M_n > x)$ para valores grandes de x, nem sempre d_n é a melhor forma de medir o quão próximas são $F^n(a_nx+b_n)$ e $G(x)$. A medida que o valor de x cresce, $1-G(x)$ e $1-F^n(a_nx+b_n)$ são tão pequenos a ponto de não terem grandes influências sobre d_n. Assim, é adequado utilizar um erro relativo, ou seja, examinar o quão próximo o quociente

$$\frac{1-F^n(a_nx+b_n)}{1-G(x)}$$

está de 1 para grandes valores de x.

Em outras palavras, no estudo dos grandes desvios de extremos (máximos) sob normalização linear, procuramos uma sequência $x_n \uparrow r(F)$, com a convergência para infinito tão rápida quanto possível, de tal forma que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-F^n(a_ny_n+b_n)}{1-G(y_n)} = 1, \tag{3.3}$$

para qualquer sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n = O(x_n)$. Equivalentemente, para $A > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\le Ax_n} \left| \frac{P\left(a_n^{-1}(M_n-b_n) > x\right)}{1-G(x)} - 1 \right| = 0. \tag{3.4}$$

Assim, (3.3) e (3.4) estabelecem para quais valores grandes de x podemos ter $1-G(x)$ como uma boa aproximação para $P\left(\frac{M_n-b_n}{a_n} > x\right)$.

Na Seção 3.1, estudamos a propriedade dos grandes desvios (3.3) para os casos em que F está no domínio de atração linear de Φ_α ou de Ψ_α. Na Seção 3.2, abordamos o caso em que F está no domínio de atração de Λ.

3.1 Casos $F \in D_l(\Phi_\alpha)$ e $F \in D_l(\Psi_\alpha)$

Primeiramente, consideramos o caso $F \in D_l(\Phi_\alpha)$. Então, pela Proposição 2.2(i), $1-F \in RV_{-\alpha}$, ou seja, $1-F$ é regularmente variante no infinito, com expoente $-\alpha$ e $r(F) = \infty$. Consequentemente, pela Proposição 1.3(a), temos

$$L(x) = x^\alpha\big(1-F(x)\big) \in RV_0,$$

ou seja, lentamente variante no infinito, e pela Proposição 1.5, L tem representação de Karamata (1.7).

A proposição a seguir estabelece condições necessárias e suficientes para a validade da propriedade de grandes desvios (3.3) no caso em que $F \in D_l(\Phi_\alpha)$.

Proposição 3.1 (Anderson [1]) *Suponha $F \in D_l(\Phi_\alpha)$ e $\{x_n\}$ estritamente crescente, $x_n \uparrow \infty$. A propriedade dos grandes desvios (3.3) ocorre se, e somente se,* *existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ com $\xi(\infty) = \infty$, $\xi(a_n) = x_n$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t\xi^{\delta}(t))}{L(t)} = 1, \tag{3.5}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$, onde $L(x) = x^{\alpha}(1 - F(x))$. Suficiente para (3.5) é que L tenha representação de Karamata (1.7) com

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \log \xi(t) = 0. \tag{3.6}$$

Observe que a condição (3.5) da Proposição 3.1 é a mesma da Definição 1.5 apresentada no Capítulo 1. Em outras palavras, um critério para a ocorrência da propriedade dos grandes desvios (3.3) é que $L(x) = x^{\alpha}\big(1 - F(x)\big)$ seja ξ-super lentamente variante ($\xi - ssv$) com $\xi(a_n) = x_n$. Para maiores detalhes sobre funções $\xi - ssv$ ver Anderson [1] e Goldie e Smith [18].

Dividimos a prova da Proposição 3.1 em três lemas apresentados a seguir.

Lema 3.1 *Seja $F \in D_l(\Phi_\alpha)$. A propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à condição*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(a_n y_n)}{L(a_n)} = 1, \tag{3.7}$$

em que $L(x) = x^{\alpha}(1-F(x)) \in RV_0$ e para qualquer sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n = O(x_n)$, com $\{x_n\}$ sequência tal que $x_n \uparrow \infty$.

Prova. Suponha $F \in D_l(\Phi_\alpha)$. Neste caso, pela Proposição 2.2(i), definimos

$$L(x) = x^{\alpha}(1 - F(x)) \in RV_0,$$

e podemos tomar $b_n = 0$ e $a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$.

Observe que $a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) \to r(F) = \infty$ e tomando $y_n \to \infty$, temos que $a_n y_n \to \infty$. Sendo a convergência

$$F^n(a_n y) \to \Phi_\alpha(y), \quad n \to \infty, \tag{3.8}$$

uniforme, segue que $F^n(a_n y_n) \to 1$ quando $n \to \infty$. Assim, $n \log F(a_n y_n) \to 0$. Pelo Exemplo 1.1, $1 - e^{-x} \sim x$, quando $x \to 0$, então segue que

$$1 - F^n(a_n y_n) = 1 - e^{-n(-\log F(a_n y_n))} \sim n(-\log F(a_n y_n)), \quad n \to \infty.$$

Agora, pelo Exemplo 1.3, $-\log x \sim 1 - x$, quando $x \to 1$, então

$$n(-\log F(a_n y_n)) \sim n(1 - F(a_n y_n)), \quad n \to \infty,$$

de modo que

$$1 - F^n(a_n y_n) \sim n(1 - F(a_n y_n)), \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Observe que tomando o logaritmo em ambos os lados de (3.8), obtemos que

$$n(-\log F(a_n y)) \to y^{-\alpha}, \quad n \to \infty,$$

para $y > 0$. Dessa forma, os mesmos argumentos anteriores podem ser utilizados para $y > 0$ fixo ao invés de y_n de forma que obtemos

$$n(1 - F(a_n y)) \sim n(-\log F(a_n y)), \quad n \to \infty.$$

Assim, fazendo $y = 1$, segue que

$$n(1 - F(a_n)) \sim n(-\log F(a_n)) \to 1, \quad n \to \infty,$$

i.e.,

$$(1 - F(a_n)) \sim \frac{1}{n}, \quad n \to \infty. \tag{3.10}$$

Por (3.9), (3.10) e usando que $1 - \Phi_\alpha(y_n) \sim y_n^{-\alpha}$ quando $y_n \to \infty$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(a_n y_n)}{1 - \Phi_\alpha(y_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1 - F(a_n y_n))}{y_n^{-\alpha}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^\alpha (1 - F(a_n y_n))}{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^\alpha (1 - F(a_n y_n))}{1 - F(a_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n y_n)^\alpha (1 - F(a_n y_n))}{a_n^\alpha (1 - F(a_n))} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{L(a_n y_n)}{L(a_n)}, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

o que implica na validade do lema.

□

Lema 3.2 *Considere as mesmas hipóteses da Proposição 3.1. As condições (3.5) e (3.7) são equivalentes.*

Prova. Suponha que para uma sequência $\{x_n\}$ estritamente crescente, $x_n \uparrow \infty$, exista uma função não-decrescente $\xi(t)$, com $\xi(\infty) = \infty$, $\xi(a_n) = x_n$ e satisfazendo (3.5).

Seja $\{y_n\}$ tal que

$$y_n \to \infty \quad \text{e} \quad y_n \le A x_n, \quad \text{para} \quad A > 0.$$

Sendo $y_n \leq Ax_n$, podemos tomar $\delta_n = \log y_n / \log x_n$, então $y_n = x_n^{\delta_n} = \xi^{\delta_n}(a_n)$. Além disso, $\{\delta_n\}$ é limitada, pois $\delta_n \leq \frac{\log A}{\log x_n} + 1$, e $(\log A/\log x_n) + 1$ é convergente, já que $x_n \to \infty$.

Como $y_n = \xi^{\delta_n}(a_n)$, $a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) \to r(F) = \infty$ e, por hipótese, (3.5) ocorre uniformemente em cada intervalo limitado contendo δ, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(a_n y_n)}{L(a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L(a_n \xi^{\delta_n}(a_n))}{L(a_n)} = 1.$$

Ou seja, (3.7) vale para $\{y_n\}$ sequência tal que $y_n = O(x_n)$.

Reciprocamente, suponha a validade de (3.7), para toda sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n = O(x_n)$. Então para toda sequência $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty = \{(u_1, u_2, \cdots); u_i \in [0,1], i = 1, 2, \cdots\}$, tomando a sequência $\{y_n\}$ de tal forma que $y_n = x_n^{\delta_n}$, temos $y_n = O(x_n)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(a_n x_n^{\delta_n})}{L(a_n)} = 1. \tag{3.12}$$

Defina

$$\xi(t) = x_n \quad \text{para} \quad t \in [a_n, a_{n+1})$$

e

$$n(t) = \sup\{n; a_n \leq t\}.$$

Segue que

$$a_{n(t)} \leq t < a_{n(t)+1}, \tag{3.13}$$

logo, sendo ξ não-decrescente, obtemos que

$$a_{n(t)} \xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(a_{n(t)}) \leq t \xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(t) \leq a_{n(t)+1} \xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(a_{n(t)+1}). \tag{3.14}$$

Observe que, pela Proposição 2.2,

$$1 - F \in RV_{-\alpha},$$

assim, pela Proposição 1.3(b),

$$\frac{1}{1-F} \in RV_\alpha.$$

Temos que $U = 1/(1-F)$ é não-decrescente, $U(\infty) = \infty$ e $U \in RV_\alpha$, então pela Proposição 1.7(ii), temos que $U^{\leftarrow} = (1/(1-F))^{\leftarrow} \in RV_{1/\alpha}$. Assim,

$$a(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t) \in RV_{1/\alpha}. \tag{3.15}$$

Como $n(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, temos que $a_{n(t)} = F^{\leftarrow}(1 - 1/n(t)) \to r(F) = \infty$.

Sendo $a(t) \in RV_{1/\alpha}$, $0 < c_n = n(t) \to \infty$, $0 < c'_n = n(t) + 1 \to \infty$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c'_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(t)+1}{n(t)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n(t)}\right) = 1,$$

ou seja, $c_n \sim c'_n$ quando $n \to \infty$. Dessa forma, pela Proposição 1.7(i), segue que

$$a(c_n) \sim a(c'_n), \quad n \to \infty,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n(t))}{a(n(t)+1)} = 1. \tag{3.16}$$

Como $a_n = F^{\leftarrow}(1 - 1/n) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(n)$, segue de (3.13) e (3.16) que

$$1 \leq \frac{t}{a_{n(t)}} < \frac{a_{n(t)+1}}{a_{n(t)}} \to 1, \quad t \to \infty,$$

ou seja,

$$a_{n(t)} \sim t, \quad t \to \infty. \tag{3.17}$$

Por (3.14) e (3.17), segue que

$$1 \leq \frac{t\xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(t)}{a_{n(t)}\xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(a_{n(t)})} \leq \frac{a_{n(t)+1}\xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(a_{n(t)+1})}{a_{n(t)}\xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(a_{n(t)})} \to 1, \quad t \to \infty,$$

ou seja,

$$t\xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(t) \sim a_{n(t)}\xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(a_{n(t)}), \quad t \to \infty. \tag{3.18}$$

Por (3.12), (3.18) e novamente pela Proposição 1.7(i)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t\xi^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}(t))}{L(t)} = 1$$

e, sendo $\{\delta_n\}$ arbitrariamente escolhida em $[0,1]^\infty$, (3.5) ocorre uniformemente para $0 \leq \delta \leq 1$.

Podemos estender este resultado para uma convergência uniforme local em $[0, \infty)$. Por exemplo, se $\delta(t) \in [1, 2]$, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t\xi^{\delta(t)}(t))}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(t\xi(t)\xi^{\delta(t)-1}(t))L(t\xi(t))}{L(t\xi(t))L(t)} = 1.$$

$\square$

Estamos interessados em estudar condições suficientes e necessárias para a ocorrência de funções $\xi - ssv$ e, consequentemente, para a ocorrência de grandes desvios quando $F \in D_l(\Phi_\alpha)$.

Seja $L \in RV_0$ com representação de Karamata (1.7) da Proposição 1.5, ou seja,

$$L(x) = c(x) \exp\left\{ \int_1^x \varepsilon(t) t^{-1} dt \right\},$$

onde $\varepsilon(t) \to 0$ e $c(t) \to c > 0$, $t \to \infty$.

Observação 3.1 *Para t suficientemente grande, sendo ξ não-decrescente e $\xi(\infty) = \infty$, podemos considerar $\xi(t) > 1$, de forma que $\xi^z(t) > 1$ uniformemente localmente em $z \in [0, \infty)$. Assim, $t\xi^z(t) > t$ e, consequentemente, $t\xi^z(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Além disso, para t suficientemente grande, temos que*

$$\log \xi(t\xi^z(t)) \geq \log \xi(t).$$

Lema 3.3 *Considere as mesmas hipóteses da Proposição 3.1. Suponha que $L(x) = x^\alpha(1 - F(x)) \in RV_0$ tenha representação de Karamata (1.7) com*

$$\varepsilon(t) = o\big(1/\log \xi(t)\big), \quad t \to \infty,$$

onde $\xi(t)$ é uma função não-decrescente e $\xi(\infty) = \infty$. Então L é $\xi - ssv$.

Prova. Pela Observação 3.1 e pela Proposição 1.5, temos que

$$t\xi^z(t) \to \infty \ \text{ e } \ c(t) \to c \in (0, \infty), \quad \text{quando} \ \ t \to \infty,$$

o que implica em

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c(t\xi^\delta(t))}{c(t)} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{c(t\xi^\delta(t))}{c(t)} = 1 + o(1), \quad t \to \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{L(t\xi^\delta(t))}{L(t)} &= \frac{c(t\xi^\delta(t))}{c(t)} \frac{\exp\left\{\int_1^{t\xi^\delta(t)} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}}{\exp\left\{\int_1^t u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}} \\ &= (1 + o(1)) \exp\left\{ \int_t^{t\xi^\delta(t)} u^{-1}\varepsilon(u)du \right\}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

de forma que, quando $t \to \infty$, o quociente $\frac{L(t\xi^\delta(t))}{L(t)}$ converge para 1 uniformemente localmente em δ se, e somente se, a integral em (3.19) converge para zero uniformemente localmente em δ.

Fazendo a mudança de variável $z = (\log u - \log t)/\log \xi(t)$ na integral em (3.19), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_t^{t\xi^\delta(t)} u^{-1}\varepsilon(u)du &= \int_0^\delta \varepsilon\big(\exp\{z\log\xi(t) + \log t\}\big)\log\xi(t)dz \\ &= \int_0^\delta \varepsilon\big(\exp\{\log[t\xi^z(t)]\}\big)\log\xi(t)dz \\ &= \int_0^\delta \varepsilon\big(t\xi^z(t)\big)\log\xi(t)dz. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dessa forma, a integral em (3.20) converge para zero uniformemente localmente em δ desde que

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t\xi^z(t))\log\xi(t) = 0, \tag{3.21}$$

uniformemente localmente em z. Entretanto, (3.21) ocorre se, e somente se, (3.6) é válida. De fato, observe que se $z = 0$ em (3.21), então temos a validade de (3.6), i.e.,

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\log\xi(t) = 0.$$

Antes de mostrarmos que (3.6) implica em (3.21), note que pela Observação 3.1, $t\xi^z(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Por (3.6) segue que

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t\xi^z(t))\log\xi(t\xi^z(t)) = \lim_{y\to\infty} \varepsilon(y)\log\xi(y) = 0, \tag{3.22}$$

uniformemente localmente em z.

Agora, se (3.6) ocorre, sendo ξ não-decrescente, por (3.22) e pela Observação 3.1, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t\xi^z(t))\log\xi(t\xi^z(t)) \\ &\geq \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t\xi^z(t))\log\xi(t) \geq 0 \end{aligned}$$

e a convergência é uniformemente localmente em z, de forma que temos a validade de (3.21). Logo, se

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\log\xi(t) = 0,$$

então temos (3.21) uniformemente em z e por (3.19) e (3.20), segue que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t\xi^\delta(t))}{L(t)} = 1$$

uniformemente em δ, o que conclui a prova do lema.

$\square$

Com os Lemas 3.1, 3.2 e 3.3 concluímos a prova da Proposição 3.1.

Prova da Proposição 3.1. Suponha $F \in D_l(\Phi_\alpha)$ e defina

$$L(x) = x^\alpha\big(1 - F(x)\big) \in RV_0.$$

Pelos Lemas 3.1 e 3.2, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (3.3) e a condição (3.5). Já no Lema 3.3, mostramos que (3.6), na representação de Karamata de L, é uma condição suficiente para a validade de (3.5) e, consequentemente, para a ocorrência de grandes desvios, o que conclui a prova da proposição.

□

Observamos também que Anderson [1] mostrou que caso ξ satisfaça uma condição de crescimento, então (3.6), i.e.,

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \log \xi(t) = 0,$$

na representação de Karamata de $L \in RV_0$, é também uma condição necessária para que L seja $\xi - ssv$. Apresentamos este resultado a seguir e a prova pode ser encontrada em Anderson [1] p.199-201 e em Resnick [31] p.99-100.

Proposição 3.2 (Anderson [1]) *Suponha $\xi(t) \to \infty$ monotonicamente e*

$$\log \xi(t\xi(t)) = O(\log \xi(t)),$$

quando $t \to \infty$. Então $L \in RV_0$ é $\xi - ssv$ se, e somente se, L tem representação de Karamata da forma (1.7) com

$$\varepsilon(t) = o(1/\log \xi(t)), \quad t \to \infty.$$

Finalizamos esta seção considerando o caso em que $F \in D_l(\Psi_\alpha)$. Neste caso, basta observar que se $F \in D_l(\Psi_\alpha)$, então considerando

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ F\left(r(F) - x^{-1}\right), & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

temos $D_l(\Phi_\alpha)$. Assim, basta aplicar a Proposição 3.1 à função F_0, com

$$L_0(x) = x^\alpha \left(1 - F\left(r(F) - \frac{1}{x}\right)\right).$$

3.2 Caso $F \in D_l(\Lambda)$

Nesta seção, consideramos o caso em que $F \in D_l(\Lambda)$ e $r(F) = \infty$. Então, pela Proposição 2.4, existe $z_0 < r(F)$, $c > 0$ e uma função auxiliar $f(x)$ absolutamente contínua, com densidade $f'(x)$, tal que $f(x) > 0$ para $x > z_0$ e $\lim\limits_{x\uparrow\infty} f'(x) = 0$ e $1 - F$ tem representação (2.8), ou seja,

$$1 - F(x) = c(x) \exp\left\{ - \int_{z_0}^{x} \frac{1}{f(u)} du, \right\}.$$

Além disso, pela Proposição 2.4(b) a função auxiliar f pode ser escolhida como

$$f(t) = \frac{1 - F(t)}{F'(t)}.$$

A próxima proposição apresenta condições necessárias e suficientes para a validade da propriedade de grandes desvios (3.3) para $F \in D_l(\Lambda)$ e $r(F) = \infty$.

Para isso, defina a função

$$R(t) = \int_{z_0}^{t} \frac{1}{f(u)} du \quad \text{para} \quad t > z_0,$$

em que z_0 e $f(t)$ são os mesmos da representação (2.8) de $1 - F(x)$.

Proposição 3.3 *Suponha que $F \in D_l(\Lambda)$ com $r(F) = \infty$ e $1 - F$ tem representação (2.8). A propriedade dos grandes desvios (3.3) ocorre se, e somente se, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ satisfazendo $\xi(\infty) = \infty$, $\xi(b_n) = x_n$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \left[R(t + \delta f(t)\xi(t)) - R(t) - \delta\xi(t)\right] = 0 \tag{3.23}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$. Suficiente para (3.23) é a condição de De Haan e Hordijk [20]

$$\lim_{t\to\infty} \xi^2(t) f'(t) = 0. \tag{3.24}$$

Dividimos a prova da Proposição 3.3 em três lemas. No primeiro, apresentamos duas condições equivalentes à propriedade dos grandes desvios (3.3). Ambas condições são utilizadas nas demonstrações dos dois lemas seguintes e dos resultados de grandes desvios sob normalização potência apresentados no Capítulo 4.

Antes de enunciarmos os lemas, apresentamos um exemplo da ocorrência de grandes desvios dos extremos sob normalização linear para a distribuição normal padrão.

Exemplo 3.1 *Considere a f.d. normal padrão $N(t)$ com densidade*

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Pelo Exemplo 2.5, podemos tomar

$$f(t) = \frac{1 - N(t)}{n(t)} \sim t^{-1}, \quad t \to \infty. \tag{3.25}$$

Dessa forma, usando que

$$N''(t) = n'(t) = -tn(t),$$

obtemos

$$f'(t) \;=\; \frac{-n^2(t) - (1 - N(t))n'(t)}{n^2(t)} = -1 + t\frac{1 - N(t)}{n(t)} = -1 + tf(t),$$

de modo que,

$$f''(t) \;=\; f(t) + tf'(t) = f(t) + t\big(-1 + tf(t)\big) = -t + (1 + t^2)f(t).$$

Pelo Lema 1.1(i), temos que

$$\frac{t}{1 + t^2} < \frac{1 - N(t)}{n(t)} = f(t), \quad t > 0,$$

e, consequentemente,

$$f''(t) \geq 0,$$

i.e., f' é não-decrescente. Além disso, por (3.25), para $x > 0$, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(tx)^{-1}}{t^{-1}} = x^{-1},$$

ou seja, $f \in RV_{-1}$.

Sendo f' monótona e $f \in RV_{-1}$, pela Proposição 1.6(ii), temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tf'(t)}{f(t)} = -1,$$

e, sendo $f(t) \sim t^{-1}$, obtemos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{t^{-2}} = -1,$$

ou seja,

$$f'(t) \sim -t^{-2}, \quad t \to \infty. \tag{3.26}$$

Pelo Exemplo 2.5 temos que $N \in D_l(\Lambda)$. Assim, pela Proposição 3.3, sabemos que uma condição suficiente para a ocorrência da propriedade de grandes desvios (3.3) é que exista $\xi(t)$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \xi^2(t)f'(t) = 0,$$

que, por (3.26), é equivalente à

$$\lim_{t\to\infty} \xi^2(t)t^{-2} = 0, \tag{3.27}$$

ou

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t)t^{-1} = 0.$$

Assim,

$$\xi(t) = o\big(t\big), \quad t \to \infty,$$

é uma condição suficiente para a ocorrência da propriedade de grandes desvios (3.3). Sendo $\xi(b_n) = x_n$, como, pelo Exemplo 2.5, $b_n \sim (2\log n)^{1/2}$ temos

$$x_n = \xi(b_n) = o(b_n) = o\big((\log n)^{1/2}\big), \quad n \to \infty. \tag{3.28}$$

Logo, a propriedade dos grandes desvios (3.3) ocorre para a escolha da sequência $\{x_n\}$ satisfazendo (3.28).

Agora, apresentamos os lemas que provam a validade da Proposição 3.3.

Lema 3.4 *Considerando as mesmas hipóteses da Proposição 3.3, a propriedade dos grandes desvios (3.3) pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} (1+o(1)) \exp\left\{ y_n - \int_{b_n}^{a_n y_n + b_n} \frac{1}{f(u)} du \right\} && (3.29)\\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{ -\int_0^1 \left[\frac{f(b_n)}{f(f(b_n)y_n v + b_n)} - 1 \right] y_n dv \right\}. && (3.30) \end{aligned}$$

Prova. Suponha que $F \in D_l(\Lambda)$ com $r(F) = \infty$. Pelo Exemplo 1.2 segue que,

$$1 - \Lambda(y_n) = 1 - \exp\{-e^{-y_n}\} \sim e^{-y_n}, \quad \text{quando} \quad y_n \to \infty.$$

Por (2.7), temos que $a_n y_n + b_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, de modo que $F(a_n y_n + b_n) \to 1$. Assim, por um argumento semelhante ao usado na prova do Lema 3.1, podemos mostrar que $1 - F^n(a_n y_n + b_n) \sim n(1 - F(a_n y_n + b_n))$, $n \to \infty$. Usando essas equivalências, obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(a_n y_n + b_n)}{1 - \Lambda(y_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(a_n y_n + b_n)}{e^{-y_n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{y_n} n(1 - F(a_n y_n + b_n)). && (3.31) \end{aligned}$$

Pela Observação 2.1, temos que $n \sim 1/(1 - F(b_n))$. Assim, como $1 - F$ tem representação (2.8), podemos escrever (3.31) como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(a_n y_n + b_n)}{1 - \Lambda(y_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{y_n}(1 - F(a_n y_n + b_n))}{1 - F(b_n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} e^{y_n}\frac{c(a_ny_n+b_n)}{c(b_n)}\exp\left\{-\int_{b_n}^{a_ny_n+b_n}\frac{1}{f(u)}du\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{c(a_ny_n+b_n)}{c(b_n)}\exp\left\{y_n-\int_{b_n}^{a_ny_n+b_n}\frac{1}{f(u)}du\right\}. \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

Como $c(x)\to c>0$, quando $x\to\infty$, e $a_ny_n+b_n\to\infty$, quando $n\to\infty$, segue que

$$
\frac{c(a_ny_n+b_n)}{c(b_n)} = 1+o(1), \quad n\to\infty. \qquad (3.33)
$$

Por (3.32), (3.33), fazendo a mudança de variáveis $v=(u-b_n)/(a_ny_n)$ na integral e usando que $a_n=f(b_n)$, respectivamente, obtemos as seguintes igualdades

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1-F^n(a_ny_n+b_n)}{1-\Lambda(y_n)} &= \lim_{n\to\infty}(1+o(1))\exp\left\{y_n-\int_{b_n}^{a_ny_n+b_n}\frac{1}{f(u)}du\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{y_n-\int_0^1\frac{a_ny_n}{f(a_ny_nv+b_n)}dv\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\int_0^1\left[\frac{f(b_n)}{f(f(b_n)y_nv+b_n)}-1\right]y_ndv\right\},
\end{aligned}
$$

o que prova a validade do lema.

□

No segundo lema, provamos que a condição (3.24) é suficiente para a ocorrência de grandes desvios (3.3).

Lema 3.5 *Considerando as mesmas hipóteses da Proposição 3.3, temos que (3.24) é uma condição suficiente para a propriedade dos grandes desvios (3.3).*

Prova.

Pelo Lema 3.4, a propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à (3.30). Sendo $y_n=O(x_n)$, $y_n\le Ax_n$, se tomarmos $\delta_n=y_n/x_n\in[0,A]$, podemos escrever $y_n=\delta_nx_n$. Se ξ é uma função não-decrescente satisfazendo $\xi(\infty)=\infty$ e $\xi(b_n)=x_n$, então

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\left[\frac{f(b_n)}{f(f(b_n)y_nv+b_n)}-1\right]y_ndv &= \int_0^1\left[\frac{f(b_n)}{f(f(b_n)\delta_n\xi(b_n)v+b_n)}-1\right]\delta_n\xi(b_n)dv \\
&= \int_0^{\delta_n}\left[\frac{f(b_n)}{f(f(b_n)\xi(b_n)u+b_n)}-1\right]\xi(b_n)du, \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

em que na última igualdade fizemos a mudança de variáveis $u=\delta_nv$.

Pela continuidade da função exponencial, segue de (3.30) e (3.34) que a propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta_n}\left[\frac{f(b_n)}{f(f(b_n)\xi(b_n)u+b_n)}-1\right]\xi(b_n)du=0. \tag{3.35}$$

Uma condição suficiente para (3.35) é

$$\lim_{x\to\infty}\xi(x)\left[\frac{f(x)}{f(x+\delta f(x)\xi(x))}-1\right]=0, \tag{3.36}$$

uniformemente localmente em δ. Agora, verificaremos que a condição (3.36) ocorre se a condição (3.24), de Haan e Hordijk [20], é válida. Ou seja,

$$\lim_{t\to\infty}\xi^2(t)f'(t)=0.$$

Note que $f\big(x+\delta f(x)\xi(x)\big)\sim f(x)$, quando $x\to\infty$. De fato, observe que,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+\delta f(x)\xi(x))}{f(x)}-1\right| &= \left|\int_x^{x+\delta f(x)\xi(x)}\frac{f'(u)}{f(x)}du\right| \\
&\leq \int_x^{x+\delta f(x)\xi(x)}\left|\frac{f'(u)}{f(x)}\right|du \\
&= \int_0^{\delta}\left|f'(x+zf(x)\xi(x))\right|\xi(x)dz \\
&\leq \int_0^{\delta}\left|f'(x+zf(x)\xi(x))\xi^2(x+zf(x)\xi(x))\right|dz,
\end{aligned}$$

para x suficientemente grande. Observe que na terceira linha fizemos a mudança de variáveis $z=(u-x)/(f(x)\xi(x))$ e na quarta usamos o fato que ξ é não-decrescente e a desigualdade se torna válida para x suficientemente grande. Além disso, por (3.24), temos que

$$\int_0^{\delta}\left|f'(x+zf(x)\xi(x))\xi^2(x+zf(x)\xi(x))\right|dz\to 0,\quad n\to\infty,$$

uniformemente localmente em δ. Logo, $f(x+\delta f(x)\xi(x))\sim f(x)$, $x\to\infty$.

Por fim, para mostrarmos que (3.24) implica em (3.36), usaremos argumentos semelhantes aos passos anteriores. Como, $f(x+\delta f(x)\xi(x))\sim f(x)$, $x\to\infty$, temos que para x suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\xi(x)\left|\frac{f(x)}{f(x+\delta f(x)\xi(x))}-1\right| &\sim \xi(x)\left|\frac{f(x+\delta f(x)\xi(x))-f(x)}{f(x)}\right| \\
&= \xi(x)\left|\int_x^{x+\delta f(x)\xi(x)}\frac{f'(u)}{f(x)}du\right| \\
&\leq \xi(x)\int_x^{x+\delta f(x)\xi(x)}\left|\frac{f'(u)}{f(x)}\right|du \\
&= \int_0^\delta |f'(x+zf(x)\xi(x))|\,\xi^2(x)dz \\
&\leq \int_0^\delta \left|f'(x+zf(x)\xi(x))\xi^2(x+zf(x)\xi(x))\right|dz \to 0,
\end{aligned}$$

uniformemente localmente em δ, como queríamos.

$\square$

O último lema desta seção garante a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (3.3) e a condição (3.23) da Proposição 3.3. Com isso, pelos Lemas 3.4, 3.5 e 3.6, completamos a prova da Proposição 3.3.

Lema 3.6 *Considerando as mesmas hipóteses da Proposição 3.3. A propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à (3.23).*

Prova. Ver Resnick [31] p.102-104.

Com os Lemas 3.4, 3.5 e 3.6 concluímos a prova da Proposição 3.3.

Prova da Proposição 3.3.

Suponha $F \in D_l(\Lambda)$ com $r(F) = \infty$ e $1 - F$ tem representação (2.8). Pelos Lemas 3.4 e 3.6, temos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (3.3) e a condição (3.23). Já no Lema 3.5, mostramos que (3.24) é uma condição suficiente para a validade da propriedade de grandes desvios (3.3), o que conclui a prova da proposição.

$\square$

Capítulo 4

Grandes Desvios de Extremos sob Normalização Potência

Neste capítulo, apresentamos condições suficientes e necessárias para a propriedade dos grandes desvios de extremos para cada uma das seis distribuições extremais sob normalização potência. Os resultados apresentados neste capítulo são devidos a Feng e Chen [12].

Considere uma f.d. F tal que $F \in D_p(H)$, ou seja, para a qual existem sequências de números reais $\alpha_n > 0$ e $\beta_n > 0$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} F^n \left(\alpha_n |x|^{\beta_n} sign(x)\right) = H(x), \quad \forall x \in C(H),$$

onde, Pela Proposição 2.5, H é do mesmo p-tipo de uma das distribuições $H_{i,\alpha}$, para $i = 1, 2, 3, 4$, Φ ou Ψ.

Similarmente ao caso clássico, procuramos uma sequência estritamente crescente $\{x_n\} \uparrow r(F)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n \left(\alpha_n |y_n|^{\beta_n} \mathrm{sign}(y_n)\right)}{1 - H(y_n)} = 1, \tag{4.1}$$

para qualquer sequência $y_n = O(x_n)$.

Dividimos o capítulo em seis seções, sendo que em cada seção apresentamos o resultado de grandes desvios considerando $F \in D_p(H)$ para cada uma das seis distribuições extremais H sob normalização potência, descritas na Proposição 2.5.

Destacamos que nos casos em que $F \in D_p(H_{i,\alpha})$ para cada $i = 1, \cdots, 4$, os resultados são obtidos utilizando a relação entre $H_{i,\alpha}$ e Φ_α, e os resultados de grandes desvios da Teoria dos Valores Extremos sob Normalização Linear apresentados no capítulo anterior. Já os casos de $F \in D_p(\Phi)$ e $F \in D_p(\Psi)$ são obtidos utilizando a relação de Φ e Ψ com Λ.

4.1 Caso $F \in D_p(H_{1,\alpha})$

Nesta seção analisamos a propriedade de grandes desvios (4.1) para o caso em que $F \in D_p(H_{1,\alpha})$, onde $H_{1,\alpha}$ é descrita na Proposição 2.5(a). Neste caso, pela Proposição 2.6(a), temos que $r(F) = \infty$, $1-F(e^x) \in RV_{-\alpha}$ e as constantes de normalização podem ser tomadas como $\alpha_n = 1$ e $\beta_n = \log F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$.

O teorema a seguir apresenta condições necessárias e suficientes para a validade de (4.1), que é baseada na função lentamente variante $L(x) = x^\alpha(1 - F(e^x))$.

Teorema 4.1 *Suponha $F \in D_p(H_{1,\alpha})$ e $\{x_n\}$ uma sequência de números reais estritamente crescente e $x_n \uparrow \infty$. A propriedade de grandes desvios (4.1) ocorre se, e somente se, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ com $\xi(\infty) = \infty$ tal que $\xi(\beta_n) = x_n$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t\,[\log \xi(t)]^\delta\right)}{L(t)} = 1 \tag{4.2}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$, onde $L(x) = x^\alpha(1 - F(e^x)) \in RV_0$. Além disso, se L tem representação de Karamata (1.7) com

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \log\log \xi(t) = 0, \tag{4.3}$$

então temos a validade de (4.2).

Note que a condição (4.3) do Teorema 4.1 pode ser reescrita como

$$\log\log \xi(t) = o(\varepsilon^{-1}(t)), \quad t \to \infty.$$

Dividimos a prova do Teorema 4.1 em três lemas. Antes de enunciarmos esses lemas, note que

$$\begin{aligned} H_{1,\alpha}(e^y) &= \exp\{-(\log e^y)^{-\alpha}\} I_{(1,\infty)}(e^y) \\ &= \exp\{-y^{-\alpha}\} I_{(0,\infty)}(y) \\ &= \Phi_\alpha(y), \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que, para $A \subset \mathbb{R}$,

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

A relação entre $H_{1,\alpha}$ e Φ_α, obtida através da função $h(x) = e^x$, será fundamental ao longo das demonstrações desta seção, pois através dela podemos recorrer aos resultados de grandes desvios de extremos sob normalização linear apresentados na Seção 3.1 do Capítulo 3.

Suponha $F \in D_p(H_{1,\alpha})$. Pela Proposição 2.6(a), defina

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad y < 0, \\ F(e^y), & \text{se} \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Observe que $1 - G \in RV_{-\alpha}$ com $r(G) = \infty$ e, pela caracterização de $D_l(\Phi_\alpha)$ dada na Proposição 2.2, temos que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$. De fato, como $1 - F(e^x) \in RV_{-\alpha}$, temos

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1 - G(tx)}{1 - G(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{1 - F(e^{tx})}{1 - F(e^t)} = x^{-\alpha}, \quad x > 0 \tag{4.5}$$

e, como $r(F) = \infty$, temos

$$\begin{aligned} r(G) &= \sup\{x; G(x) < 1\} \\ &= \log \sup\{e^x; F(e^x) < 1\} \\ &= \log \sup\{y; F(y) < 1\} \\ &= \log r(F) = \infty. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Assim, pela Proposição 2.6(a), segue que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$.

Além disso, pela Proposição 2.6(a), podemos escolher $\beta_n = \log F^{\leftarrow}(1 - 1/n)$ e $\alpha_n = 1$. Assim, tomando x de tal forma que $\beta_n x \geq 0$, obtemos que

$$G^n(\beta_n x) = F^n\left((e^x)^{\beta_n}\right) = F^n\left(\alpha_n |e^x|^{\beta_n} sign(e^x)\right) \to H_{1,\alpha}(e^x) = \Phi_\alpha(x), \tag{4.7}$$

ou seja, as constantes de normalização de G podem ser tomadas como sendo $a_n = \beta_n$ e $b_n = 0$.

A seguir, apresentamos o primeiro lema para a prova do Teorema 4.1. Essencialmente, utilizaremos que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$ e, assim, pelo Lema 3.1, obtemos uma condição equivalente à propriedade dos grandes desvios.

Lema 4.1 *Suponha $F \in D_p(H_{1,\alpha})$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à condição*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L(\beta_n \log y_n)}{L(\beta_n)} = 1, \tag{4.8}$$

em que $L(x) = x^\alpha\big(1 - F(e^x)\big) \in RV_0$ e $y_n = O(x_n)$, com $\{x_n\}$ estritamente crescente e $x_n \uparrow \infty$.

Prova. Suponha $F \in D_p(H_{1,\alpha})$. Por (4.5), podemos escrever

$$L(x) = x^\alpha\big(1 - G(x)\big) \in RV_0.$$

Tomando uma sequência $\{z_n\}$ tal que $y_n = e^{z_n}$ e usando (4.4) e (4.7), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(\alpha_n |y_n|^{\beta_n} sign(y_n))}{1 - H_{1,\alpha}(y_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(e^{\beta_n z_n})}{1 - H_{1,\alpha}(e^{z_n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - G^n(\beta_n z_n)}{1 - \Phi_\alpha(z_n)} \cdot \tag{4.9}$$

Em outras palavras, (4.9) nos diz que se $F \in D_p(H_{1,\alpha})$, a propriedade dos grandes desvios (4.1) (potência) ocorre se, e somente se, a propriedade dos grandes desvios (3.3) (clássico) ocorre para $G \in D_l(\Phi_\alpha)$.

Como $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, pelo Lema 3.1, a propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à condição

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n z_n)}{L(\beta_n)} = 1,$$

assim, (4.1) ocorre se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n \log y_n)}{L(\beta_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n z_n)}{L(\beta_n)} = 1.$$

□

No próximo lema, utilizando o Lema 4.1, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.2) do Teorema 4.1. Novamente, considerando que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, podemos nos basear na prova do Lema 3.2.

Lema 4.2 *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 4.1. São equivalentes as condições (4.2) (do Teorema 4.1) e (4.8) (do Lema 4.1).*

Prova. Suponha a validade de (4.2). Vamos mostrar (4.8) quando $\log y_n \to \infty$ e

$$\log y_n \leq A \log x_n. \tag{4.10}$$

Tomando o logaritmo em ambos os lados de (4.10), obtemos que

$$\log\log y_n \leq \log A + \log\log x_n. \tag{4.11}$$

Dividindo ambos os lados de (4.11) por $\log\log x_n$ segue que

$$\frac{\log\log y_n}{\log\log x_n} \leq \frac{\log A}{\log\log x_n} + 1. \tag{4.12}$$

Tomando $\{\delta_n\}$ de tal forma que

$$\delta_n = \frac{\log\log y_n}{\log\log x_n},$$

por (4.12), temos que $\{\delta_n\}$ é limitada, pois como $x_n \to \infty$, a sequência $\log A / \log\log x_n$ é convergente e, em particular, limitada.

Além disso,

$$\log\log y_n = \delta_n \log\log x_n = \log\left(\log x_n\right)^{\delta_n},$$

donde, usando que $\xi(\beta_n) = x_n$ e $\log(x)$ é inversível, obtemos

$$\log y_n = (\log x_n)^{\delta_n} = (\log \xi(\beta_n))^{\delta_n}. \tag{4.13}$$

Como $\beta_n = \log F^{\leftarrow}(1-1/n) \to \log r(F) = \infty$ e $\{\delta_n\}$ é limitada, pela validade de (4.13) e (4.2), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n \log y_n)}{L(\beta_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\beta_n[\log \xi(\beta_n)]^{\delta_n}\right)}{L(\beta_n)} = 1,$$

o que prova a validade de (4.8).

Reciprocamente, suponha a validade de (4.8). Então, para toda sequência $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty = \{(u_1, u_2, \cdots); u_i \in [0,1], i = 1, 2, \cdots\}$, definimos a sequência $\{y_n\}$ de tal forma que

$$\log y_n = (\log x_n)^{\delta_n}.$$

Note que $y_n = O(x_n)$. De fato, como $\{x_n\} \uparrow \infty$, então dado $M > 1$, para n suficientemente grande, como $\delta_n \in [0,1]$, obtemos

$$\delta_n \log\log x_n \leq \log\log(M x_n).$$

Assim,

$$(\log x_n)^{\delta_n} \leq \log M + \log x_n,$$

de forma que,

$$\log\left(\frac{\exp\{(\log x_n)^{\delta_n}\}}{x_n}\right) \leq \log M.$$

Logo, para n suficientemente grande, temos

$$\frac{\exp\{[\log x_n]^{\delta_n}\}}{x_n} \leq M,$$

ou seja,

$$y_n = O(x_n).$$

Assim, por (4.8) segue

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n[\log x_n]^{\delta_n})}{L(\beta_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n \log y_n)}{L(\beta_n)} = 1. \tag{4.14}$$

Por (4.5) e (4.7) temos que $G^n(\beta_n x) \to \Phi_\alpha(x)$, onde $G(x) = 1 - F(e^x)$, $x \geq 0$. Assim como na prova do Lema 3.2, defina

$$\xi(t) = x_n, \quad \text{para} \quad t \in [\beta_n, \beta_{n+1}) \tag{4.15}$$

e

$$n(t) = \sup\{n; \beta_n \leq t\}.$$

Então

$$\beta_{n(t)} \leq t < \beta_{n(t)+1}. \tag{4.16}$$

Dessa forma, procedendo analogamente à prova de (3.15) e (3.16) do Lema 3.2, com $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, obtemos

$$\beta_{n(t)} = \log F^{\leftarrow}\big(1 - 1/n(t)\big) \to \log r(F) = \infty, \quad \text{quando} \quad t \to \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\beta_{n(t)+1}}{\beta_{n(t)}} = 1$$

e

$$\beta_n \sim \beta_{n+1}, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo, dividindo ambos os lados de (4.16) por $\beta_{n(t)}$ obtemos que

$$1 \leq \frac{t}{\beta_{n(t)}} < \frac{\beta_{n(t)+1}}{\beta_{n(t)}} \to 1, \quad t \to \infty, \tag{4.17}$$

ou seja,

$$t \sim \beta_{n(t)}. \tag{4.18}$$

Sendo $\beta_n = \log F^{\leftarrow}(1-1/n)$, $\log x$ uma função crescente e $F^{\leftarrow}(1-1/n)$ não-decrescente, segue que $\{\beta_n\}$ é não-decrescente. Como $\{x_n\}$ é estritamente crescente, a função $\xi(t)$ definida em (4.15) é não-decrescente. Além disso, $\xi(\infty) = \infty$.

Agora, como ξ é não-decrescente e log é crescente, por (4.16), temos que

$$\log \xi(\beta_{n(t)}) \leq \log \xi(t) < \log \xi(\beta_{n(t)+1}),$$

e, sendo $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, obtemos

$$[\log \xi(\beta_{n(t)})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} \leq [\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} < [\log \xi(\beta_{n(t)+1})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}. \tag{4.19}$$

Segue de (4.16) e (4.19) que

$$\beta_{n(t)}[\log \xi(\beta_{n(t)})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} \leq t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} < \beta_{n(t)+1}[\log \xi(\beta_{n(t)+1})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}},$$

ou seja,

$$1 \leq \frac{t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}}{\beta_{n(t)}[\log \xi(\beta_{n(t)})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}} < \frac{\beta_{n(t)+1}[\log \xi(\beta_{n(t)+1})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}}{\beta_{n(t)}[\log \xi(\beta_{n(t)})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}},$$

e, como $\beta_n \sim \beta_{n+1}$, temos

$$t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} \sim \beta_{n(t)}[\log \xi(\beta_{n(t)})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}, \tag{4.20}$$

quando $t \to \infty$.

Observe que por (4.15) temos $\xi(\beta_n) = x_n$, de modo que (4.14) pode ser reescrito como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\beta_n[\log \xi(\beta_n)]^{\delta_n}\right)}{L(\beta_n)} = 1. \tag{4.21}$$

Sendo $\xi(\infty) = \infty$ e $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, temos que $t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} \to \infty$, quando $t \to \infty$. Além disso, por (4.20) e pela Proposição 1.7(i), temos que

$$L\left(t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right) \sim L\left(\beta_{n(t)}[\log \xi(\beta_{n(t)})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right),$$

quando $t \to \infty$. Segue de (4.21) que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}})}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(\beta_{n(t)}[\log \xi(\beta_{n(t)})]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}})}{L(\beta_{n(t)})} = 1, \tag{4.22}$$

e, como $\{\delta_n\}$ foi escolhida arbitrariamente em $[0,1]^\infty$, (4.2) ocorre uniformemente para $\delta \in [0,1]$. Podemos estender este resultado para uma convergência uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$. Por exemplo, se $\delta \in [1,2]$, então

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t \log \xi(t)[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}-1}\right)}{L\left(t \log \xi(t)\right)} \frac{L\left(t \log \xi(t)\right)}{L(t)} = 1,$$

onde usamos que $\delta_n - 1 \in [0,1]$ e, como $t[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}-1} \to \infty$, quando $t \to \infty$, por (4.22), temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t \log \xi(t)\right)}{L(t)} = 1$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t \log \xi(t)[\log \xi(t)]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}-1}\right)}{L\left(t \log \xi(t)\right)} = 1.$$

$\square$

O próximo lema, juntamente com o Lema 4.2, nos garante que a condição (4.3) é suficiente para a ocorrência de grandes desvios quando $F \in D_l(H_{1,\alpha})$.

Lema 4.3 *Suponha que $F \in D_p(H_{1,\alpha})$. A condição (4.3) é suficiente para (4.2). Ou seja, se $L(x) = x^\alpha(1 - F(e^x))$ tem representação de Karamata (1.7) com $\varepsilon(t)$*

satisfazendo

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \log\log \xi(t) = 0,$$

para alguma função $\xi(t)$ não-decrescente, com $\xi(\infty) = \infty$, então L satisfaz (4.2), i.e., L é $\xi_1 - ssv$, com $\xi_1(t) = \log \xi(t)$.

Prova.

Para t suficientemente grande, sendo ξ não-decrescente e $\xi(\infty) = \infty$, podemos considerar $\xi(t) > 1$, de forma que $\big[\log \xi(t)\big]^\delta > 1$ uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$. Assim, $t\big[\log \xi(t)\big]^\delta > t$ e, consequentemente,

$$t\big[\log \xi(t)\big]^\delta \to \infty, \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{4.23}$$

Além disso, para t suficientemente grande, temos que

$$\log \xi\big(t\big[\log \xi(t)\big]^\delta\big) \geq \log \xi(t). \tag{4.24}$$

Sendo $L(x) = x^\alpha\big(1 - F(e^x)\big) \in RV_0$, pela Proposição 1.5, obtemos que L tem representação de Karamata (1.7) com

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} c(x) &= c \in (0, \infty), \\ \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) &= 0. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{c\left(t\big[\log \xi(t)\big]^\delta\right)}{c(t)} = 1 + o(1), \quad t \to \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{L\left(t\big[\log \xi(t)\big]^\delta\right)}{L(t)} &= \frac{c\left(t\big[\log \xi(t)\big]^\delta\right)}{c(t)} \frac{\exp\left\{\int_1^{t[\log \xi(t)]^\delta} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}}{\exp\left\{\int_1^t u^{-1}\varepsilon(u)\right\}} \\ &= (1 + o(1)) \exp\left\{\int_t^{t[\log \xi(t)]^\delta} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

de forma que, quando $t \to \infty$, o quociente $\frac{L(t[\log \xi(t)]^\delta)}{L(t)}$ converge para 1 uniformemente localmente em δ se, e somente se, a integral em (4.25) converge para zero uniformemente localmente em δ.

Fazendo a mudança de variáveis $z = (\log u - \log t)/ \log\log \xi(t)$ na integral em (4.25), obtemos que

$$\int_t^{t[\log \xi(t)]^\delta} u^{-1}\varepsilon(u)du = \int_0^\delta \varepsilon\big(t\big[\log \xi(t)\big]^z\big) \log\log \xi(t) dz. \tag{4.26}$$

Dessa forma, a integral em (4.25) converge para zero uniformemente localmente em δ desde que

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon\big(t\big[\log \xi(t)\big]^z\big) \log\log \xi(t) = 0, \tag{4.27}$$

uniformemente localmente em z. Observe que a condição (4.27) é equivalente à (4.3). De fato, se $z = 0$ em (4.27), então temos a validade de (4.3), ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \log\log \xi(t) = 0.$$

Antes de mostrarmos que (4.3) implica em (4.27), note que, por (4.3) e (4.23) , segue que

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon\big(t\big[\log \xi(t)\big]^z\big) \log\log \xi\big(t\big[\log \xi(t)\big]^z\big) = \lim_{y\to\infty} \varepsilon(y) \log\log \xi(y) = 0, \tag{4.28}$$

uniformemente localmente em z.

Agora, se (4.3) ocorre, sendo ξ não-decrescente, por (4.24) e (4.28), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \left|\varepsilon\big(t\big[\log \xi(t)\big]^z\big) \log\log \xi\big(t\big[\log \xi(t)\big]^z\big)\right| \\ &\geq \lim_{t\to\infty} \left|\varepsilon\big(t\big[\log \xi(t)\big]^z\big) \log\log \xi(t)\right| \geq 0 \end{aligned}$$

e a convergência é uniformemente localmente em z, de forma que temos a validade de (4.27).

Logo, por (4.25), (4.26) e (4.27), temos que a condição (4.3) é suficiente para (4.2), o que conclui a prova do lema.

□

Com as provas dos Lemas 4.1, 4.2 e 4.3 concluímos a prova do Teorema 4.1.

Prova do Teorema 4.1. Suponha $F \in D_p(H_{1,\alpha})$ e defina

$$L(x) = x^\alpha\big(1 - F(e^x)\big) \in RV_0.$$

Pelos Lemas 4.1 e 4.2, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.2). Já no Lema 4.3, mostramos que (4.3) é uma condição suficiente para a validade de (4.2) e, consequentemente, para a ocorrência de grandes desvios, o que conclui a prova do teorema.

□

4.2 Caso $F \in D_p(H_{2,\alpha})$

Nesta seção, consideramos o caso em que $F \in D_p(H_{2,\alpha})$, onde $H_{2,\alpha}$ é descrita na Proposição 2.5(b). Neste caso, pela Proposição 2.6(b), temos que $0 < r(F) < \infty$, $1 - F\big(r(F)\exp\{-1/x\}\big) \in RV_{-\alpha}$ e as constantes estabilizantes podem ser escolhidas como

$$\alpha_n = r(F) \;\text{ e }\; \beta_n = \log\left(\frac{r(F)}{F^{\leftarrow}(1-1/n)}\right).$$

Lembrando que $F^{\leftarrow}(1-1/n) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(n)$.

No teorema a seguir são apresentadas condições necessárias e suficientes para que a propriedade dos grandes desvios (4.1) seja válida. Tais condições são baseadas no comportamento da função lentamente variante

$$L(x) = x^{\alpha}[1 - F\left(r(F)\exp\{-1/x\}\right)] \in RV_0. \tag{4.29}$$

Teorema 4.2 *Suponha $F \in D_p(H_{2,\alpha})$, com $r(F) \in (0,1]$ e seja $\{x_n\}$ uma sequência estritamente crescente, $x_n \uparrow r(F)$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) ocorre se, e somente se, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ com $\xi(\infty) = r(F)$ tal que $\xi(\beta_n^{-1}) = x_n$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t\left[\log \xi^{-1}(t)\right]^{-\delta}\right)}{L(t)} = 1 \tag{4.30}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$, onde L é dada em (4.29). Mais ainda, se L tem representação de Karamata (1.7) com $\varepsilon(t)$ satisfazendo

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) \log\left[\log \xi^{-1}(t)\right]^{-1} = 0, \tag{4.31}$$

então temos a validade de (4.30).

Note que a condição (4.31) do Teorema 4.2 pode ser reescrita como

$$\log\left[\log \xi^{-1}(t)\right]^{-1} = o(\varepsilon^{-1}(t)), \quad t \to \infty.$$

Observação 4.1 *Feng e Chen [12] não consideraram a restrição $r(F) \in (0,1]$ no Teorema 4.2. A demostração do teorema não foi apresentada sob a argumentação de que ela é análoga à prova do Teorema 4.1. Entretanto, ao detalharmos a demonstração, observamos que para que a função $\log\log \xi^{-1}(t)$ esteja bem definida, precisamos garantir que $\log \xi^{-1}(t) > 0$ para t suficientemente grande. Como $\xi(\infty) = r(F) \in (0,\infty)$, caso $r(F) > 1$, teríamos $\log \xi^{-1}(\infty) < 0$.*

Assim como na demonstração do Teorema 4.1, para a demonstração do Teorema 4.2 podemos recorrer aos resultados de grandes desvios de extremos sob normalização linear apresentados na Seção 3.1 do Capítulo 3, tendo em vista a relação entre $H_{2,\alpha}$ e Φ_α. De fato, $y>0$, temos $0<e^{-1/y}<1$, então podemos obter

$$\begin{aligned} H_{2,\alpha}\left(e^{-1/y}\right) &= \exp\left\{-\big(-\log(e^{-1/y})\big)^{\alpha}\right\} I_{(0,1)}(e^{-1/y}) \\ &= \exp\{-y^{-\alpha}\} I_{(0,\infty)}(y) \\ &= \Phi_\alpha(y), \end{aligned} \tag{4.32}$$

em que $I_A(x)$ denota a função indicadora de $A\subset\mathbb{R}$.

A demonstração do Teorema 4.2 será feita por meio de três lemas. Para isso, defina

$$G(x)=\begin{cases} 0, & \text{se} \quad x<0, \\ F\left(r(F)e^{-1/x}\right), & \text{se} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

Como $0<r(F)<\infty$, podemos obter

$$\begin{aligned} r(G) &= \sup\left\{x>0; F\left(r(F)e^{-1/x}\right)<1\right\} \\ &= \sup\left\{x>0; r(F)e^{-1/x}<r(F)\right\} \\ &= \sup\left\{x>0; e^{-1/x}<1\right\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

e, como $1-F\left(r(F)e^{-1/x}\right)\in RV_{-\alpha}$, temos, para $x>0$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-G(tx)}{1-G(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-F\left(r(F)e^{-1/tx}\right)}{1-F(r(F)e^{-1/t})}=x^{-\alpha}. \tag{4.33}$$

Além disso, para $x\geq 0$, temos $\beta_n^{-1}x\geq 0$ e

$$\begin{aligned} G^n(\beta_n^{-1}x) &= F^n\left(r(F)\exp\left\{-\frac{1}{\beta_n^{-1}x}\right\}\right) \\ &= F^n\left(\alpha_n\left|e^{-1/x}\right|^{\beta_n} sign\left(e^{-1/x}\right)\right)\longrightarrow H_{2,\alpha}\left(e^{-1/x}\right)=\Phi_\alpha(x), \end{aligned} \tag{4.34}$$

ou seja, as constantes de normalização de G podem ser escolhidas como $a_n=\beta_n^{-1}$ e $b_n=0$.

A seguir apresentamos o primeiro lema para a prova do Teorema 4.2. Essencialmente, utilizaremos que $G\in D_l(\Phi_\alpha)$ e, assim, pelo Lema 3.1, obtemos uma condição equivalente à propriedade dos grandes desvios.

Lema 4.4 *Suponha $F\in D_p(H_{2,\alpha})$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à condição*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L\big(\beta_n^{-1}[-\log y_n]^{-1}\big)}{L(\beta_n^{-1})}=1, \tag{4.35}$$

em que $L(x)=x^\alpha\left(1-F\left(r(F)e^{-1/x}\right)\right)\in RV_0$ e $\{x_n\}$ é tal que $x_n\uparrow r(F)$ e $y_n=O(x_n)$.

Prova. Suponha $F \in D_p(H_{2,\alpha})$. Por (4.33), podemos escrever

$$L(x) = x^\alpha\big(1 - G(y)\big) \in RV_0.$$

Tomando uma sequência $\{z_n\}$ tal que $z_n > 0$ e $y_n = e^{-1/z_n}$ e usando (4.32) e (4.34), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(\alpha_n|y_n|^{\beta_n} sign(y_n))}{1 - H_{2,\alpha}(y_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(r(F)|y_n|^{\beta_n})}{1 - H_{2,\alpha}(y_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n\Big(r(F)\exp\Big\{-\frac{1}{\beta_n^{-1}z_n}\Big\}\Big)}{1 - H_{2,\alpha}(e^{-1/z_n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - G^n(\beta_n^{-1}z_n)}{1 - \Phi_\alpha(z_n)}. \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Em outras palavras, (4.36) nos diz que, se $F \in D_p(H_{2,\alpha})$, então a propriedade dos grandes desvios (4.1) (potência) ocorre se, e somente se, a propriedade dos grandes desvios (3.3) (clássico) ocorre para $G \in D_l(\Phi_\alpha)$.

Como $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, pelo Lema 3.1, a propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à condição

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n^{-1}z_n)}{L(\beta_n^{-1})} = 1.$$

Assim, (4.1) ocorre se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n^{-1}[-\log y_n]^{-1}\big)}{L(\beta_n^{-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\beta_n^{-1}z_n\right)}{L\left(\beta_n^{-1}\right)} = 1.$$

$\square$

No próximo lema, utilizando o Lema 4.4, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.30) do Teorema 4.2. Assim como na prova do Teorema 4.1, considerando que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, podemos nos basear na prova do Lema 3.2.

Lema 4.5 *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 4.2. As condições (4.30) (do Teorema 4.2) e (4.35) (do Lema 4.4) são equivalentes.*

Prova. Primeiramente, suponha a validade de (4.30). Vamos mostrar (4.35) quando $\log y_n \to r(F)$ e

$$[-\log y_n] \le A[-\log x_n]. \qquad (4.37)$$

Sendo $r(F) \in (0, 1]$, $x_n \uparrow r(F)$ estritamente crescente, então $-\log x_n > 0$ para n grande e, assim, tomando o logaritmo em ambos os lados de (4.37), obtemos que

$$\log[-\log y_n] \le \log A + \log[-\log x_n].$$

Dividindo ambos os lados por $\log[-\log x_n]$ segue que

$$\frac{\log[-\log y_n]}{\log[-\log x_n]} \leq \frac{\log A}{\log[-\log x_n]} + 1. \tag{4.38}$$

Tomando $\{\delta_n\}$ de tal forma que

$$\delta_n = \frac{\log[-\log y_n]}{\log[-\log x_n]}, \tag{4.39}$$

então, por (4.38), temos que $\{\delta_n\}$ é limitada, pois, como $x_n \uparrow r(F)$, a sequência $\frac{\log A}{\log[-\log x_n]}$ é convergente. Agora, usando que $\xi\left(\beta_n^{-1}\right) = x_n$ em (4.39) obtemos

$$-\log y_n = [-\log x_n]^{\delta_n} = \left[-\log \xi(\beta_n^{-1})\right]^{\delta_n}. \tag{4.40}$$

Como $\beta_n^{-1} = [\log(r(F)/F^{\leftarrow}(1-1/n))]^{-1} \to \infty$ e $\{\delta_n\}$ é limitada, pela validade de (4.30) e (4.40), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n^{-1}[-\log y_n]^{-1}\big)}{L(\beta_n^{-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n^{-1}[-\log \xi(\beta_n^{-1})]^{-\delta_n}\big)}{L(\beta_n^{-1})} = 1,$$

o que prova a validade de (4.35).

Reciprocamente, suponha a validade de (4.35). Então para toda sequência $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty = \{(u_1, u_2, \cdots); u_i \in [0,1], i = 1, 2, \cdots\}$, definimos a sequência $\{y_n\}$ de tal forma que satisfaça (4.40), i.e,

$$-\log y_n = [-\log x_n]^{\delta_n}.$$

Usando argumentos similares aos usados na segunda parte da prova do Lema 4.2 podemos mostrar que $y_n = O(x_n)$.

Assim, por (4.35) temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n^{-1}[-\log x_n]^{-\delta_n})}{L(\beta_n^{-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n^{-1}[-\log y_n]^{-1}\big)}{L(\beta_n^{-1})} = 1. \tag{4.41}$$

Por (4.33) e (4.34) temos que $G^n(\beta_n^{-1}x) \to \Phi_\alpha(x)$. Agora, assim como na prova do Lema 3.2, defina

$$\xi(t) = x_n, \quad \text{para} \quad t \in [\beta_n^{-1}, \beta_{n+1}^{-1}) \tag{4.42}$$

e

$$n(t) = \sup\{n; \beta_n^{-1} \leq t\}.$$

Assim,

$$\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1} \leq t < \left(\beta_{n(t)+1}\right)^{-1} \tag{4.43}$$

e similarmente à prova de (3.15), (3.16) e (3.17) do Lema 3.2, podemos mostrar que

$$\beta_n \sim \beta_{n+1}, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

ou ainda,

$$\beta_{n(t)} \sim \beta_{n(t)+1}, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Dividindo ambos os lados de (4.43) por $\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}$ obtemos que

$$1 \leq \frac{t}{\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}} < \frac{\left(\beta_{n(t)+1}\right)^{-1}}{\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}} \to 1, \quad t \to \infty, \tag{4.44}$$

ou seja,

$$t \sim \beta_{n(t)}^{-1}. \tag{4.45}$$

Sendo $\beta_n = \log(r(F)/F^{\leftarrow}(1-1/n))$, log crescente e $F^{\leftarrow}(1-1/n)$ não-decrescente, segue que $\{\beta_n^{-1}\}$ é não-decrescente. Como $\{x_n\}$ é estritamente crescente, a função $\xi(t)$ definida em (4.42) é não-decrescente. Além disso, $\xi(\infty) = r(F)$.

Agora, como ξ é não-decrescente, $\log x$ é crescente e $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, por (4.43), podemos obter

$$1 \leq \frac{t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}}}{\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}\left[-\log\left(\xi\left(\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}\right)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}}} < \frac{\left(\beta_{n(t)+1}\right)^{-1}\left[-\log\left(\xi\left(\left(\beta_{n(t)+1}\right)^{-1}\right)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}}}{\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}\left[-\log\left(\xi\left(\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}\right)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}}}.$$

Como $\beta_{n(t)} \sim \beta_{n(t)+1}$, quando $t \to \infty$, temos

$$t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}} \sim \left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}\left[-\log\left(\xi\left(\left(\beta_{n(t)}\right)^{-1}\right)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}}, \tag{4.46}$$

quando $t \to \infty$, e, como $\xi\left(\beta_n^{-1}\right) = x_n$, então (4.41) pode ser reescrito como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\beta_n^{-1}\left[-\log\left(\xi\left(\beta_n^{-1}\right)\right)\right]^{-\delta_n}\right)}{L(\beta_n^{-1})} = 1. \tag{4.47}$$

Sendo $\xi(\infty) = r(F)$ e $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, temos que $t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}} \to \infty$, quando $t \to \infty$. Além disso, por (4.46) e pela Proposição 1.7(i), temos que

$$L\left(t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right) \sim L\left(\beta_{n(t)}^{-1}\left[-\log\left(\xi(\beta_{n(t)})\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right), \quad t \to \infty.$$

Segue de (4.47) que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}}\right)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L\left(\beta_{n(t)}^{-1}\left[-\log\left(\xi(\beta_{n(t)})\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}}\right)}{L(\beta_{n(t)}^{-1})} = 1, \tag{4.48}$$

e, como $\{\delta_n\}$ foi escolhida arbitrariamente em $[0,1]^\infty$, (4.30) ocorre uniformemente para $\delta \in [0,1]$. Podemos estender este resultado para uma convergência uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$ seguindo os mesmos passos indicados na prova dos Lemas 3.2 e 4.2.

□

O próximo lema, juntamente com o Lema 4.5, nos garante que a condição (4.31) é suficiente para a ocorrência de grandes desvios quando $F \in D_l(H_{2,\alpha})$.

Lema 4.6 *Suponha que $F \in D_l(H_{2,\alpha})$, com $r(F) \in (0,1]$. Se*

$$L(x) = x^\alpha \left[1 - F\left(r(F)e^{-1/x}\right)\right] \in RV_0$$

tem representação de Karamata (1.7) com $\varepsilon(t)$ satisfazendo (4.31), para alguma função $\xi(t)$ não-decrescente e tal que $\xi(\infty) = r(F)$, então a condição (4.30) é válida.

Prova.

Primeiramente, como ξ é não-decrescente e $\xi(\infty) = r(F) \in (0,1]$, temos que

$$t\big[-\log(\xi(t))\big]^{-\delta} \to \infty, \quad \text{quando} \quad t \to \infty, \tag{4.49}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$.

Sendo $L(x) = x^\alpha \left[1 - F\left(r(F)e^{-1/x}\right)\right] \in RV_0$, pela Proposição 1.5, obtemos que L tem representação de Karamata (1.7) com

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} c(x) &= c \in (0,\infty), \\ \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) &= 0, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{c\left(t\big[-\log(\xi(t))\big]^{-\delta}\right)}{c(t)} = 1 + o(1), \quad t \to \infty.$$

Assim,

$$\frac{L\left(t\big[-\log(\xi(t))\big]^{-\delta}\right)}{L(t)} = \frac{c\left(t\big[-\log(\xi(t))\big]^{-\delta}\right)}{c(t)} \frac{\exp\left\{\int_1^{t[-\log(\xi(t))]^{-\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}}{\exp\left\{\int_1^t u^{-1}\varepsilon(u)\right\}}$$

$$= \quad (1+o(1))\exp\left\{\int_t^{t[-\log(\xi(t))]^{-\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}, \tag{4.50}$$

de forma que, quando $t \to \infty$, o quociente $\frac{L(t[-\log(\xi(t))]^{-\delta})}{L(t)}$ converge para 1, uniformemente localmente em δ se, e somente se, a integral em (4.50) converge para zero uniformemente localmente em δ. Fazendo a mudança de variáveis

$$z = \frac{\log u - \log t}{\log\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-1}}$$

na integral em (4.50), obtemos que

$$\int_t^{t[-\log(\xi(t))]^{-\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du = \int_0^{\delta} \varepsilon\big(t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-z}\big)\log\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-1} dz. \tag{4.51}$$

Dessa forma, a integral em (4.50) converge para zero uniformemente localmente em δ desde que

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon\big(t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-z}\big)\log\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-1} = 0, \tag{4.52}$$

uniformemente localmente em z. Observe que (4.52) ocorre se, e somente se, (4.31) é válido. De fato, se $z = 0$ em (4.52), então temos a validade de (4.31), ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\log\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-1} = 0.$$

Agora se (4.31) é válida, por (4.49) temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \varepsilon\big(t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-z}\big)\log\left[-\log\left(\xi\left(t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-z}\right)\right)\right]^{-1} &= \lim_{y\to\infty}\varepsilon(y)\log[-\log\xi(y)]^{-1} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.53}$$

uniformemente localmente em z.

Agora, para mostramos (4.52), provemos que, para t suficientemente grande

$$\left|\log\left[-\log\left(\xi\left(t\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-z}\right)\right)\right]^{-1}\right| \quad \geq \quad \left|\log\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-1}\right|. \tag{4.54}$$

Para isso, suponha primeiramente que $r(F) \in (0, e^{-1})$. Como $\xi(\infty) = r(F)$, segue para t suficientemente grande que $\xi(t) < e^{-1}$ e, equivalentemente, $\log\left[-\log\xi(t)\right]^{-1} < 0$. Logo, como ξ é não-decrescente, segue (4.54).

No segundo caso, consideramos $r(F) \in [e^{-1}, 1)$ e a argumentação é análoga. Portanto, de (4.53) e (4.54), segue (4.52), o que conclui a prova do lema.

$\square$

Com as provas dos Lemas 4.4, 4.5 e 4.6 concluímos a prova do Teorema 4.2.

Prova do Teorema 4.2. Suponha $F \in D_p(H_{2,\alpha})$ e defina

$$L(x) = x^{\alpha}\left[1 - F\left(r(F)e^{-1/x}\right)\right] \in RV_0.$$

Pelos Lemas 4.4 e 4.5, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.30). Já no Lema 4.6, mostramos que (4.31) é uma condição suficiente para a validade de (4.30) e, consequentemente, para a ocorrência de grandes desvios, o que conclui a prova do teorema.

□

4.3 Caso $F \in D_p(H_{3,\alpha})$

Nesta seção, analisamos o caso em que $F \in D_p(H_{3,\alpha})$, onde $H_{3,\alpha}$ é descrita na Proposição 2.5(c). Neste caso, pela Proposição 2.6(c), temos que

$$r(F) = 0, \quad 1 - F\left(-e^{-x}\right) \in RV_{-\alpha}$$

e as constantes estabilizantes podem ser escolhidas como

$$\alpha_n = 1 \quad \text{e} \quad \beta_n = -\log\left(-F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Condições necessárias e suficientes para a validade da propriedade de grandes desvios (4.1) são apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 4.3 *Seja $F \in D_p(H_{3,\alpha})$ e $\{x_n\}$ uma sequência de números reais estritamente crescente, com $x_n \uparrow r(F) = 0$. A propriedade de grandes desvios (4.1) ocorre se, e somente se, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ com $\xi(\infty) = 0$ tal que $\xi(\beta_n) = x_n$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\big(t[-\log(-\xi(t))]^{\delta}\big)}{L(t)} = 1 \tag{4.55}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$, sendo $L(x) = x^{\alpha}\left(1 - F(-e^{-x})\right) \in RV_0$. Além disso, se L tem representação de Karamata (1.7) com

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\log[-\log(-\xi(t))] = 0, \tag{4.56}$$

então temos a validade de (4.55).

Note que a condição (4.56) do Teorema 4.3 pode ser reescrita como

$$\log[-\log(-\xi(t))] = o(\varepsilon^{-1}(t)), \quad t \to \infty.$$

Assim como nos casos anteriores, a demonstração do Teorema 4.3 é baseada na seguinte relação entre $H_{3,\alpha}$ e Φ_α: para $y > 0$

$$\begin{aligned} H_{3,\alpha}(-e^{-y}) &= \exp\left\{-\big(-\log(e^{-y})\big)^{-\alpha}\right\} I_{(-1,0)}(-e^{-y}) \\ &= \exp\{-y^{-\alpha}\} I_{(0,\infty)}(y) \\ &= \Phi_\alpha(y), \end{aligned} \tag{4.57}$$

em que $I_A(x)$ é a função indicadora de $A \subset \mathbb{R}$.

Aqui também, a demonstração do Teorema 4.3 será feita por meio de três lemas. Para isso, defina

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad y < 0, \\ F(-e^{-y}), & \text{se} \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Então, como $1 - F(-e^{-x}) \in RV_{-\alpha}$ e $r(F) = 0$, podemos mostrar que $1 - G \in RV_{-\alpha}$ e $r(G) = \infty$. Pela Proposição 2.2(a), segue que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$ e para $x \geq 0$, como $\beta_n > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} G^n(\beta_n x) &= F^n\left(-e^{-x\beta_n}\right) \\ &= F^n\left(-\left|-e^{-x}\right|^{\beta_n}\right) \\ &= F^n\left(\alpha_n| - e^{-x}|^{\beta_n} sign(-e^{-x})\right) \to H_{3,\alpha}\left(-e^{-x}\right) = \Phi_\alpha(x), \end{aligned} \tag{4.58}$$

ou seja, as constantes de normalização de G podem ser tomadas como sendo $a_n = \beta_n$ e $b_n = 0$.

A seguir, apresentamos o primeiro lema para a prova do Teorema 4.3. Essencialmente, utilizaremos que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$ e, assim, pelo Lema 3.1, obtemos uma condição equivalente à propriedade dos grandes desvios.

Lema 4.7 *Suponha $F \in D_p(H_{3,\alpha})$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à condição*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n(-\log(-y_n))\big)}{L(\beta_n)} = 1, \tag{4.59}$$

em que $L(x) = x^\alpha\big(1 - F(-e^{-x})\big) \in RV_0$ e $\{x_n\}$ uma sequência de números reais estritamente crescente, com $x_n \uparrow r(F) = 0$ e $y_n = O(x_n)$.

Prova. Suponha $F \in D_p(H_{3,\alpha})$. Como $1 - G \in RV_{-\alpha}$, então

$$L(x) = x^\alpha\big(1 - G(y)\big) \in RV_0.$$

Considere uma sequência $\{z_n\}$ tal que $y_n = -e^{-z_n}$. Escolhendo $\alpha_n = 1$ e usando (4.57) e (4.58), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(\alpha_n|y_n|^{\beta_n} sign(y_n))}{1 - H_{3,\alpha}(y_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(-|y_n|^{\beta_n})}{1 - H_{3,\alpha}(y_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(-e^{-\beta_n z_n})}{1 - H_{3,\alpha}(-e^{-z_n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - G^n(\beta_n z_n)}{1 - \Phi_\alpha(z_n)}. \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

Em outras palavras, (4.60) nos diz que, se $F \in D_p(H_{3,\alpha})$, a propriedade dos grandes desvios (4.1) (potência) ocorre se, e somente se, a propriedade dos grandes desvios (3.3) (clássico) ocorre para $G \in D_l(\Phi_\alpha)$.

Como $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, pelo Lema 3.1, a propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à condição

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n z_n)}{L(\beta_n)} = 1.$$

Assim, (4.1) ocorre se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n[-\log(-y_n)]\big)}{L(\beta_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n z_n)}{L(\beta_n)} = 1.$$

□

No próximo lema, utilizando o Lema 4.7, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.55) do Teorema 4.3. Novamente, considerando que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, podemos nos basear na prova do Lema 3.2.

Lema 4.8 *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 4.3. Então são equivalentes as condições (4.55) (do Teorema 4.3) e (4.59) (do Lema 4.7).*

Prova.

Suponha a validade de (4.55). Vamos mostrar (4.59) quando $-\log(-y_n) \to \infty$ e

$$[-\log(-y_n)] \le A[-\log(-x_n)]. \qquad (4.61)$$

Tomando $\{\delta_n\}$ de tal forma que

$$\delta_n = \frac{\log[-\log(-y_n)]}{\log[-\log(-x_n)]},$$

por (4.61), temos que

$$\delta_n \le \frac{\log A}{\log[-\log(-x_n)]} + 1.$$

Como $x_n \uparrow 0$, temos que o lado direito da desigualdade é convergente e, assim, $\{\delta_n\}$ é limitada. Além disso, usando que $\xi(\beta_n) = x_n$, obtemos

$$-\log(-y_n) = [-\log(-x_n)]^{\delta_n} = [-\log(-\xi(\beta_n))]^{\delta_n}. \tag{4.62}$$

Como $\beta_n = -\log\big(-F^{\leftarrow}(1-1/n)\big) \to \infty$ e $\{\delta_n\}$ é limitada, pela validade de (4.55) e (4.62), segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n[-\log(-y_n)])}{L(\beta_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n[-\log(-\xi(\beta_n))]^{\delta_n})}{L(\beta_n)} = 1,$$

o que prova a validade de (4.59).

Reciprocamente, suponha a validade de (4.59). Então para toda sequência $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty = \{(u_1, u_2, \cdots); u_i \in [0,1], i = 1, 2, \cdots\}$, definimos a sequência $\{y_n\}$ de tal forma que satisfaça (4.62), ou seja,

$$-\log(-y_n) = [-\log(-x_n)]^{\delta_n}.$$

Seguindo argumentos semelhantes à prova da segunda parte do Lema 4.2, podemos mostrar que $y_n = O(x_n)$, pois $x_n \uparrow 0$ quando $n \to \infty$. Assim, por (4.59) temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n[-\log(-x_n)]^{\delta_n})}{L(\beta_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n(-\log(-y_n))\big)}{L(\beta_n)} = 1. \tag{4.63}$$

Por (4.58) temos que $G^n(\beta_n x) \to \Phi_\alpha(x)$. Assim como na prova do Lema 3.2, defina

$$\xi(t) = x_n, \quad \text{para} \quad t \in [\beta_n, \beta_{n+1}) \tag{4.64}$$

e

$$n(t) = \sup\{n; \beta_n \le t\}.$$

Assim,

$$\beta_{n(t)} \le t < \beta_{n(t)+1} \tag{4.65}$$

e analogamente à prova do Lema 4.2, podemos provar que

$$\beta_{n(t)} \sim \beta_{n(t)+1} \;\; \text{e} \;\; t \sim \beta_{n(t)}, \quad \text{quando} \;\; t \to \infty. \tag{4.66}$$

Sendo $\beta_n = -\log\left(-F^{\leftarrow}(1-1/n)\right)$, log crescente e $F^{\leftarrow}(1-1/n)$ não-decrescente, segue que $\{\beta_n\}$ é não-decrescente. Como $\{x_n\}$ é estritamente crescente, a função $\xi(t)$ definida em (4.64) é não-decrescente. Além disso, $\xi(\infty) = 0$.

Como ξ é não-decrescente e $\log x$ é crescente, $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, usando (4.65), podemos obter

$$1 \leq \frac{t\left[-\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}}{\beta_{n(t)+1}\left[-\log\left(-\xi(\beta_{n(t)+1})\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}} < \frac{\beta_{n(t)+1}\left[-\log\left(-\xi(\beta_{n(t)+1})\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}}{\beta_{n(t)}\left[-\log\left(-\xi(\beta_{n(t)})\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}},$$

e. como $\beta_{n(t)} \sim \beta_{n(t)+1}$, temos

$$t\left[-\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} \sim \beta_{n(t)}\left[-\log\left(-\xi(\beta_{n(t)})\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}, \tag{4.67}$$

quando $t \to \infty$.

Observe que por (4.64), podemos reescrever (4.63) como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\beta_n\left[-\log\left(-\xi(\beta_n)\right)\right]^{\delta_n}\right)}{L(\beta_n)} = 1. \tag{4.68}$$

Sendo $\xi(\infty) = r(F) = 0$ e $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, temos que $t\left[-\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}} \to \infty$, quando $t \to \infty$. Além disso, por (4.67) e pela Proposição 1.7(i), temos que

$$L\left(t\left[-\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right) \sim L\left(\beta_{n(t)}\left[-\log\left(-\xi(\beta_{n(t)})\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right),$$

quando $t \to \infty$. Segue de (4.68) que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t\left[-\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L\left(\beta_{n(t)}\left[-\log\left(-\xi(\beta_{n(t)})\right)\right]^{\delta_{\lfloor t \rfloor}}\right)}{L(\beta_{n(t)})} = 1, \tag{4.69}$$

e, como $\{\delta_n\}$ foi escolhida arbitrariamente em $[0,1]^\infty$, (4.55) ocorre uniformemente para $\delta \in [0,1]$. Podemos estender este resultado para uma convergência uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$ seguindo os mesmos passos indicados na prova dos Lemas 3.2 e 4.2.

□

O próximo lema, juntamente com o Lema 4.8, nos garante uma condição suficiente para a ocorrência de grandes desvios quando $F \in D_l(H_{3,\alpha})$, baseada na representação de Karamata (1.7) de $L(x) = x^\alpha(1 - F(-e^{-x}))$.

Lema 4.9 *Seja $F \in D_p(H_{3,\alpha})$. Se $L(x) = x^\alpha(1 - F(-e^{-x})) \in RV_0$ tem representação de Karamata (1.7) com $\varepsilon(t)$ satisfazendo (4.56) para alguma função $\xi(t)$ não-decrescente e tal que $\xi(\infty) = 0$, então temos a validade de (4.55), ou seja, L é $\xi_1 - ssv$, em que $\xi_1(t) = \log[-\log(-\xi(t))]$.*

Prova. Para t suficientemente grande, sendo ξ não-decrescente e $\xi(\infty) = 0$, podemos considerar $\xi(t) > -e^{-1}$, de forma que $\left[-\log(-\xi(t))\right]^\delta > 1$ uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$.

Assim,

$$t\big[-\log(-\xi(t))\big]^{\delta} > t$$

e, consequentemente,

$$t\big[-\log(-\xi(t))\big]^{\delta} \to \infty, \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{4.70}$$

Além disso, para t suficientemente grande, temos que

$$-\log\Big(-\xi\big(t\big[-\log(-\xi(t))\big]^{\delta}\big)\Big) \geq -\log\big(-\xi(t)\big). \tag{4.71}$$

Sendo $L(x) = x^{\alpha}[1 - F(-e^{-x})] \in RV_0$, pela Proposição 1.5, obtemos que L tem representação de Karamata (1.7) com

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} c(x) &= c \in (0,\infty), \\ \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) &= 0, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{c\Big(t\big[-\log(-\xi(t))\big]^{\delta}\Big)}{c(t)} = 1 + o(1), \quad t \to \infty.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{L\Big(t\big[-\log(-\xi(t))\big]^{\delta}\Big)}{L(t)} &= \frac{c\Big(t\big[-\log(-\xi(t))\big]^{\delta}\Big)}{c(t)} \frac{\exp\Big\{\int_1^{t[-\log(-\xi(t))]^{\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du\Big\}}{\exp\Big\{\int_1^t u^{-1}\varepsilon(u)\Big\}} \\ &= (1+o(1))\exp\left\{\int_t^{t[-\log(-\xi(t))]^{\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}, \end{aligned} \tag{4.72}$$

de forma que, quando $t \to \infty$, o quociente $\frac{L(t[-\log(-\xi(t))]^{\delta})}{L(t)}$ converge para 1 uniformemente localmente em δ se, e somente se, a integral em (4.72) converge para zero uniformemente localmente em δ.

Fazendo a mudança de variáveis

$$z = \frac{(\log u - \log t)}{\log\big(-\log\big(-\xi(t)\big)\big)}$$

na integral em (4.72), obtemos que

$$\int_t^{t[-\log(-\xi(t))]^{\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du = \int_0^{\delta} \varepsilon\big(t\,\big[-\log\big(-\xi(t)\big)\big]^{z}\big)\log\big[-\log\big(-\xi(t)\big)\big]\,dz. \tag{4.73}$$

Dessa forma, a integral em (4.72) converge para zero uniformemente localmente em δ

desde que

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon\big(t\,[-\log\big(-\xi(t)\big)]^z\big)\log\big[-\log\big(-\xi(t)\big)\big] = 0, \tag{4.74}$$

uniformemente localmente em z. Observe que (4.74) ocorre se, e somente se, (4.56) é válido. De fato, se $z = 0$ em (4.74), então temos a validade de (4.56), ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\log\big[-\log\big(-\xi(t)\big)\big] = 0.$$

Antes de mostrarmos que (4.56) implica em (4.74), note que, por (4.56) e (4.70) , segue que para $y = t\big[-\log\big(-\xi(t)\big)\big]^z$ temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \varepsilon\left(t\,[-\log(-\xi(t))]^z\right)\log\left[-\log\left(-\xi\left(t\,[-\log(-\xi(t))]^z\right)\right)\right] &= \lim_{y\to\infty} \varepsilon(y)\log[-\log(-\xi(y))] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.75}$$

uniformemente localmente em z.

Agora, se (4.56) ocorre, sendo ξ não-decrescente, por (4.71) e (4.75), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \left|\varepsilon\big(t\,[-\log\big(-\xi(t)\big)]^z\big)\log\left[-\log\left(-\xi\left(t\,[-\log\big(-\xi(t)\big)]^z\right)\right)\right]\right| \\ &\geq \lim_{t\to\infty} \left|\varepsilon\big(t\,[-\log\big(-\xi(t)\big)]^z\big)\log\big[-\log\big(-\xi(t)\big)\big]\right| \geq 0 \end{aligned}$$

e a convergência é uniformemente localmente em z, de forma que temos a validade de (4.74).

Logo, por (4.72), (4.73) e (4.74), temos que (4.56) é uma condição suficiente para (4.55).

□

Com as provas dos Lemas 4.7, 4.8 e 4.9 concluímos a prova do Teorema 4.3.

Prova do Teorema 4.3. Suponha $F \in D_p(H_{3,\alpha})$ e defina

$$L(x) = x^\alpha[1 - F(-e^{-x})] \in RV_0.$$

Pelos Lemas 4.7 e 4.8, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.55). Já no Lema 4.9, mostramos que (4.56) é uma condição suficiente para a validade de (4.55) e, consequentemente, para a ocorrência de grandes desvios, o que conclui a prova do teorema.

□

4.4 Caso $F \in D_p(H_{4,\alpha})$

Nesta seção, consideramos o caso em que $F \in D_p(H_{4,\alpha})$, onde $H_{4,\alpha}$ é descrita na Proposição 2.5(d). Neste caso, pela Proposição 2.6(d), temos que

$$r(F) < 0 \ \text{ e } \ 1 - F\left(r(F)\exp\{1/x\}\right) \in RV_{-\alpha}.$$

Além disso, as constantes de estabilização podem ser escolhidas como

$$\alpha_n = -r(F) \ \text{ e } \ \beta_n = \log\left(\frac{F^{\leftarrow}(1-1/n)}{r(F)}\right).$$

No teorema a seguir são apresentadas as condições suficientes e necessárias para a validade da propriedade dos grandes desvios (4.1).

Assim como nos teoremas anteriores, o seguinte resultado é obtido utilizando a função $L(x) = x^{\alpha}\left[1 - F\big(r(F)\exp\{1/x\}\big)\right] \in RV_0$ apresentada na Observação 2.2 da Seção 2.2 do Capítulo 2.

Teorema 4.4 *Suponha $F \in D_p(H_{4,\alpha})$ com $r(F) < -1$ e $\{x_n\}$ estritamente crescente, $x_n \uparrow r(F)$. A propriedade de grandes desvios (4.1) ocorre se, e somente se, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ com $\xi(\infty) = r(F)$ tal que $\xi(\beta_n^{-1}) = x_n$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\Big(t\left[\log(-\xi(t))\right]^{-\delta}\Big)}{L(t)} = 1 \tag{4.76}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$, sendo $L(x) = x^{\alpha}\left(1 - F\big(r(F)\exp\{1/x\}\big)\right)$. Além disso, se L tem representação de Karamata (1.7) com

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\log\left[\log(-\xi(t))\right]^{-1} = 0, \tag{4.77}$$

então temos a validade de (4.76).

Observe que a condição (4.77) do Teorema 4.4 pode ser reescrita como

$$\log\left[\log(-\xi(t))\right]^{-1} = o(\varepsilon^{-1}(t)), \quad t \to \infty.$$

Observação 4.2 *Feng e Chen [12] apresentaram o Teorema 4.4 sem considerar a restrição $r(F) < -1$. Para justificar o acréscimo desta hipótese, destacamos que para a função $\log\log(-\xi(t))$ estar bem definida, precisamos garantir que $\log(-\xi(t)) > 0$ para t suficientemente grande. Como $\xi(\infty) = r(F) < 0$, caso $r(F) > -1$, teríamos* $\log(-\xi(\infty)) < 0$.

Usando o mesmo raciocínio das seções anteriores, podemos mostrar que para

$y > 0$

$$H_{4,\alpha}\left(-e^{1/y}\right) = \exp\left\{-\left(\log\left(e^{1/y}\right)\right)^{\alpha}\right\} I_{(-\infty,-1)}\left(-e^{1/y}\right) = \Phi_{\alpha}(y), \tag{4.78}$$

em que, $I_A(x)$ é a função indicadora no conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Através desta relação, assim como na prova dos Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3, podemos recorrer aos resultados de grandes desvios dos extremos sob normalização linear apresentados na Seção 3.1 do Capítulo 3.

Para isso, defina

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad y < 0, \\ F\left(r(F)e^{1/y}\right), & \text{se} \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Então, como $1-F\left(r(F)e^{1/y}\right) \in RV_{-\alpha}$ e $r(F) < -1$, podemos mostrar que $1-G \in RV_{-\alpha}$ com $r(G) = \infty$ e, pela Proposição 2.2, segue $G \in D_l(\Phi_\alpha)$. Além disso, para $x > 0$, usando a relação em (4.78), como $F \in D_p(H_{4,\alpha})$ com $\alpha_n = -r(F)$ segue que

$$\begin{aligned} G^n(\beta_n^{-1}x) &= F^n\left(r(F)\exp\left\{\frac{1}{\beta_n^{-1}x}\right\}\right) \\ &= F^n\left(\alpha_n\left|-e^{1/x}\right|^{\beta_n} sign\left(-e^{1/x}\right)\right) \longrightarrow H_{4,\alpha}\left(-e^{1/x}\right) = \Phi_\alpha(x), \end{aligned} \tag{4.79}$$

ou seja, as constantes de normalização de G podem ser tomadas como sendo $a_n = \beta_n^{-1}$ e $b_n = 0$.

A seguir apresentamos o primeiro lema para a prova do Teorema 4.2. Essencialmente, utilizaremos que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$ e, assim, pelo Lema 3.1, obtemos uma condição equivalente à propriedade dos grandes desvios.

Lema 4.10 *Suponha $F \in D_p(H_{4,\alpha})$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à condição*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\beta_n^{-1}[\log(-y_n)]^{-1}\right)}{L(\beta_n^{-1})} = 1, \tag{4.80}$$

em que $L(x) = x^{\alpha}\left(1 - F\left(r(F)e^{1/x}\right)\right) \in RV_0$ e $y_n = O(x_n)$.

Prova. A prova segue essencialmente o mesmo raciocínio das provas dos Lemas 4.1, 4.4 e 4.7 das seções anteriores.

Suponha $F \in D_p(H_{4,\alpha})$. Podemos escrever

$$L(x) = x^{\alpha}\big(1 - G(y)\big) \in RV_0.$$

Tomando uma sequência $\{z_n\}$ tal que $z_n > 0$ e $y_n = -e^{1/z_n}$ e usando as igualdades

(4.78) e (4.79), podemos obter que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - F^n(\alpha_n |y_n|^{\beta_n} sign(y_n))}{1 - H_{4,\alpha}(y_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - G^n(\beta_n^{-1} z_n)}{1 - \Phi_\alpha(z_n)}\cdot$$

Assim, se $F \in D_p(H_{4,\alpha})$, a propriedade dos grandes desvios (4.1) (potência) ocorre se, e somente se, a propriedade dos grandes desvios (3.3) (clássico) ocorre para $G \in D_l(\Phi_\alpha)$.

Como $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, pelo Lema 3.1, a propriedade dos grandes desvios (3.3) é equivalente à condição

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L(\beta_n^{-1} z_n)}{L(\beta_n^{-1})} = 1\cdot$$

Assim, como z_n é tal que $y_n = -e^{1/z_n}$, segue que (4.1) é equivalente à (4.80).

□

No próximo lema, utilizando o Lema 4.10, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.76) do Teorema 4.4. Novamente, considerando que $G \in D_l(\Phi_\alpha)$, podemos nos basear na prova do Lema 3.2.

Lema 4.11 *Considere as mesmas hipóteses do Teorema 4.4. Então são equivalentes as condições (4.76) (do Teorema 4.4) e (4.80) (do Lema 4.10).*

Prova.

Suponha a validade de (4.76). Vamos mostrar (4.80) quando $\log(-y_n) \to \log(-r(F))$ e

$$[\log(-y_n)] \leq A[\log(-x_n)]. \tag{4.81}$$

Considerando

$$\delta_n = \frac{\log[\log(-y_n)]}{\log[\log(-x_n)]}, \quad n \geq 1.$$

Como $x_n \uparrow r(F)$, usando (4.81), podemos mostrar, analogamente ao que foi feito nas provas dos Lemas 4.2, 4.5 e 4.8, que a sequência $\{\delta_n\}$ é limitada. Como, por hipótese, $\xi(\beta_n^{-1}) = x_n$ e $\beta_n^{-1} = [\log(F^{\leftarrow}(1 - 1/n)/r(F))]^{-1} \to \infty$ segue de (4.76) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n^{-1}[\log(-y_n)]^{-1}\big)}{L(\beta_n^{-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n^{-1}[\log(-\xi(\beta_n^{-1}))]^{-\delta_n}\big)}{L(\beta_n^{-1})} = 1,$$

o que prova a validade de (4.80).

Reciprocamente, suponha a validade de (4.80). Então para toda sequência $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty = \{(u_1, u_2, \cdots); u_i \in [0,1], i = 1, 2, \cdots\}$, definimos a sequência $\{y_n\}$ de tal forma que $\log(-y_n) = [\log(-x_n)]^{\delta_n}$.

Como $r(F) < -1$ e $x_n \uparrow r(F)$, podemos mostrar, usando um raciocínio semelhante aos utilizados nos Lemas 4.2, 4.5 e 4.8 que $y_n = O(x_n)$.

Assim, por (4.80) temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\beta_n^{-1}[\log(-x_n)]^{-\delta_n}\right)}{L(\beta_n^{-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{L\big(\beta_n^{-1}[\log(-y_n)]^{-1}\big)}{L(\beta_n^{-1})} = 1. \tag{4.82}$$

Por (4.79) temos que $G^n(\beta_n^{-1}x) \to \Phi_\alpha(x)$. Assim como na prova do Lema 3.2, defina

$$\xi(t) = x_n, \quad \text{para} \quad t \in [\beta_n^{-1}, \beta_{n+1}^{-1}) \tag{4.83}$$

e

$$n(t) = \sup\{n; \beta_n^{-1} \le t\}.$$

Usando as mesmas ideias do Lema 3.2 (e também dos Lemas 4.2, 4.5 e 4.8), podemos provar que

$$\beta_{n(t)} \sim \beta_{n(t)+1} \ \text{ e } \ t \sim \beta_{n(t)}^{-1}, \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{4.84}$$

Sendo $\beta_n = \log(F^{\leftarrow}(1-1/n)/r(F))$, $\log x$ crescente e $F^{\leftarrow}(1-1/n)$ não-decrescente, segue que $\{\beta_n^{-1}\}$ é não-decrescente. Como $\{x_n\}$ é estritamente crescente, a função $\xi(t)$ definida em (4.83) é não-decrescente. Além disso, $\xi(\infty) = r(F)$.

Como ξ é não-decrescente, $\log x$ é crescente e sendo $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, usando (4.84), podemos obter

$$t\left[\log\big(-\xi(t)\big)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}} \sim \beta_{n(t)}^{-1}\left[\log\left(-\xi\left(\beta_{n(t)}^{-1}\right)\right)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}}, \tag{4.85}$$

quando $t \to \infty$.

Sendo $\xi(\infty) = r(F)$ e $\{\delta_n\} \subset [0,1]^\infty$, temos que $t\left[\log\big(-\xi(t)\big)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}} \to \infty$, quando $t \to \infty$. Além disso, por (4.85) e pela Proposição 1.7(i), temos que

$$L\left(t\left[\log\big(-\xi(t)\big)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}}\right) \sim L\left(\beta_{n(t)}^{-1}\left[\log\big(-\xi(\beta_{n(t)})\big)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}}\right),$$

quando $t \to \infty$. Agora, como $\xi(\beta_n^{-1}) = x_n$, então segue de (4.83) que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L\left(t\left[\log\big(-\xi(t)\big)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}}\right)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L\left(\beta_{n(t)}^{-1}\left[\log\big(-\xi(\beta_{n(t)})\big)\right]^{-\delta_{\lfloor t\rfloor}}\right)}{L(\beta_{n(t)}^{-1})} = 1, \tag{4.86}$$

e, como $\{\delta_n\}$ foi escolhida arbitrariamente em $[0,1]^\infty$, (4.76) ocorre uniformemente para $\delta \in [0,1]$. Podemos estender este resultado para uma convergência uniformemente localmente em $\delta \in [0,\infty)$ seguindo os mesmos passos indicados na prova dos Lemas 3.2 e 4.2.

$\square$

O próximo lema, juntamente com o Lema 4.11, nos garante uma condição suficiente para a ocorrência de grandes desvios quando $F \in D_l(H_{4,\alpha})$, em termos da representação de Karamata de $L(x) = x^\alpha \left[1 - F\left(r(F)e^{1/x}\right)\right] \in RV_0$.

Lema 4.12 *Suponha $F \in D_p(H_{4,\alpha})$ e $r(F) < -1$. Se $L(x) = x^\alpha \left[1 - F\left(r(F)e^{1/x}\right)\right]$ tem representação de Karamata (1.7) com $\varepsilon(t)$ satisfazendo (4.77) para alguma função não-decrescente $\xi(t)$ tal que $\xi(\infty) = r(F)$, então a condição (4.76) é válida.*

Prova.

Para t suficientemente grande, sendo ξ não-decrescente e $\xi(\infty) = r(F) < -1$, temos que

$$t\big[\log(-\xi(t))\big]^{-\delta} \to \infty, \quad \text{quando} \quad t \to \infty, \tag{4.87}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$.

Sendo $L(x) = x^\alpha \left[1 - F\left(r(F)e^{1/x}\right)\right] \in RV_0$, pela Proposição 1.5, obtemos que L tem representação de Karamata (1.7) com

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0, \infty) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0,$$

então por (4.87) temos

$$\frac{c\left(t\big[\log(-\xi(t))\big]^{-\delta}\right)}{c(t)} = 1 + o(1), \quad t \to \infty.$$

Assim, de (1.7) temos

$$\begin{aligned}
\frac{L\left(t\big[\log(-\xi(t))\big]^{-\delta}\right)}{L(t)} &= \frac{c\left(t\big[\log(-\xi(t))\big]^{-\delta}\right)}{c(t)} \frac{\exp\left\{\int_1^{t[\log(-\xi(t))]^{-\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}}{\exp\left\{\int_1^t u^{-1}\varepsilon(u)\right\}} \\
&= (1 + o(1)) \exp\left\{\int_t^{t[\log(-\xi(t))]^{-\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du\right\}.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$z = \frac{\log u - \log t}{\log\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-1}}$$

na integral em (4.88), obtemos que

$$\int_t^{t[\log(-\xi(t))]^{-\delta}} u^{-1}\varepsilon(u)du = \int_0^\delta \varepsilon\big(t\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-z}\big) \log\left[-\log\left(\xi(t)\right)\right]^{-1} dz. \tag{4.89}$$

Dessa forma, a integral em (4.88) converge para zero uniformemente localmente em δ

desde que
$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon\big(t\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-z}\big)\log\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-1} = 0, \tag{4.90}$$
uniformemente localmente em z. Observe que (4.90) ocorre se, e somente se, (4.77) é válido. De fato, se $z = 0$ em (4.90), então temos a validade de (4.77), ou seja,
$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)\log\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-1} = 0.$$
Agora, se (4.77) ocorre, então por (4.87) temos
$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon\big(t\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-z}\big)\log\left[\log\left(-\xi\left(t\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-z}\right)\right)\right]^{-1} = 0, \tag{4.91}$$
uniformemente localmente em z.

Para mostramos a validade de (4.90), basta ver que para t suficientemente grande
$$\left|\log\left[\log\left(-\xi\left(t\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-z}\right)\right)\right]^{-1}\right| \geq \left|\log\left[\log\left(-\xi(t)\right)\right]^{-1}\right|. \tag{4.92}$$

Para isso, vamos considerar primeiramente o caso em que $r(F) < -e$. Como $\xi(\infty) = r(F)$, então, para t suficientemente grande, temos que $\xi(t) < -e$ e, consequentemente, $\log\left[\log(-\xi(t))\right]^{-1} < 0$. Dessa forma, como $\xi(t)$ é não-decrescente, podemos obter (4.92). No segundo caso, consideramos $r(F) \in [-e, -1)$ e a argumentação segue de forma análoga.

Portanto, de (4.92) e (4.91) obtemos (4.90).

□

Com as provas dos Lemas 4.10, 4.11 e 4.12 concluímos a prova do Teorema 4.4.

Prova do Teorema 4.4. Suponha $F \in D_p(H_{4,\alpha})$ e defina
$$L(x) = x^{\alpha}\left[1 - F\left(r(F)e^{1/x}\right)\right] \in RV_0.$$
Pelos Lemas 4.10 e 4.11, mostramos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.76). Já no Lema 4.12, mostramos que (4.77) é uma condição suficiente para a validade de (4.76) e, consequentemente, para a ocorrência de grandes desvios, o que conclui a prova do teorema.

□

4.5 Caso $F \in D_p(\Phi)$

Nesta seção, analisamos a propriedade de grandes desvios no caso em que $F \in D_p(\Phi)$, com $r(F) = \infty$, onde Φ é descrita na Proposição 2.5(e). Neste caso, pela Proposição 2.6(e), temos $r(F) > 0$ e

$$\lim_{y \to \infty} \frac{1 - F\left(y \exp\{x f(y)\}\right)}{1 - F(y)} = e^{-x}, \quad x > 0,$$

onde f é escolhida como

$$f(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_t^{r(F)} \frac{1 - F(x)}{x} dx.$$

Além disso, as constantes estabilizantes podem ser escolhidas como sendo

$$\alpha_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{e} \quad \beta_n = f(\alpha_n).$$

Apresentamos a seguir o teorema que estabelece condições necessárias e suficientes para a validade da propriedade de grandes desvios (4.1) para $F \in D_p(\Phi)$ com $r(F) = \infty$.

Teorema 4.5 *Suponha que $F \in D_p(\Phi)$ com $r(F) = \infty$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) ocorre se, e somente se, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ satisfazendo $\xi(\infty) = r(F) = \infty$, $\xi(\log \alpha_n) = x_n$ e*

$$\lim_{t \to \infty} \left[R\left(t + \delta f\left(e^t\right) \log \xi(t)\right) - R(t) - \delta \log \xi(t)\right] = 0, \tag{4.93}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$, em que para algum $z_0 \in \mathbb{R}$,

$$R(t) = \int_{z_0}^{t} \frac{1}{f(e^u)} du, \quad \textit{para} \quad t > z_0.$$

Além disso, se

$$\lim_{t \to \infty} [\log \xi(t)]^2 f'(e^t) e^t = 0, \tag{4.94}$$

então (4.93) é válida.

Note que a condição (4.94) do Teorema 4.5 pode ser reescrita como

$$[\log \xi(t)]^2 = o\left((f'(e^t)e^t)^{-1}\right), \quad t \to \infty.$$

Observação 4.3 *Feng e Chen [12] apresentaram o Teorema 4.5 sem utilizar a restrição $r(F) = \infty$. Entretanto, em sua demonstração os autores utilizaram a expressão (3.29) do Lema 3.4 que é válida para uma sequência $y_n \to \infty$. Não conseguimos garantir a validade de (3.29) para $y_n \to r(F) < \infty$.*

Antes de provarmos o Teorema 4.5, apresentamos um exemplo da aplicação deste resultado.

Exemplo 4.1 *Seja*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 1, \\ 1 - \exp\{-\log^2 x\}, & se \quad x \geq 1. \end{cases}$$

No Exemplo 2.8 mostramos que $F \in D_p(\Phi)$ com $\alpha_n = \exp\{\sqrt{\log n}\}$ e $\beta_n = 1/(2\sqrt{\log n})$.

Queremos encontrar uma sequência $\{x_n\} \uparrow r(F) = \infty$ com a convergência tão rápida quanto possível e que seja estritamente crescente satisfazendo a propriedade dos grandes desvios (4.1).

Pelo Teorema 4.5 uma condição suficiente para a propriedade dos grandes desvios (4.1) é

$$[\log \xi(t)]^2 = o\left((f'(e^t)e^t)^{-1}\right), \quad t \to \infty,$$

onde ξ é não-decrescente satisfazendo $\xi(\infty) = r(F) = \infty$ e $\xi(\log \alpha_n) = x_n$.

Assim, como $\alpha_n = \exp\{\sqrt{\log n}\}$, basta tomarmos $\{x_n\}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} [\log x_n]^2 &= \left[\log \xi \left(\log \exp\left\{\sqrt{\log n}\right\}\right)\right]^2 \\ &= \left[\log \xi \left(\sqrt{\log n}\right)\right]^2 \\ &= o\left(\left(f'\left(e^{\sqrt{\log n}}\right) e^{\sqrt{\log n}}\right)^{-1}\right), \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Por (2.18) do Exemplo 2.8, verificamos que, para $t \geq 1$,

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\exp\{-\log^2 t\}} \left(1 - N\left(\sqrt{2} \log t\right)\right),$$

em que $N(t) = \int_{-\infty}^{t} n(z)dz = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$.

Definindo

$$g(t) = f(e^t), \quad t > 0,$$

então, podemos obter,

$$g(t) = \sqrt{\pi} e^{t^2} \left(1 - N\left(\sqrt{2} t\right)\right), \quad t > 0. \tag{4.96}$$

Observe que

$$n\left(\sqrt{2} t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2},$$

de modo que, pela regra da cadeia e pela regra da derivada do produto, segue de (4.96) *que*

$$
\begin{aligned}
f'(e^t)e^t = g'(t) &= \sqrt{\pi}\left[2te^{t^2}\left(1-N\left(\sqrt{2}t\right)\right) - e^{t^2}n\big(\sqrt{2}t\big)\sqrt{2}\right] \\
&= \sqrt{\pi}\left[2te^{t^2}\left(1-N\left(\sqrt{2}t\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right] \\
&= 2\sqrt{\pi}te^{t^2}\left(1-N\left(\sqrt{2}t\right)\right) - 1 \\
&= \sqrt{2}t\frac{1-N\left(\sqrt{2}t\right)}{n\left(\sqrt{2}t\right)} - 1, \quad t > 0.
\end{aligned} \tag{4.97}
$$

Por outro lado, no Lema 1.2 mostramos que

$$
f'(e^t)e^t = \sqrt{2}t\frac{1-N\left(\sqrt{2}t\right)}{n\left(\sqrt{2}t\right)} - 1 \sim \frac{1-\sqrt{1+4/t^2}}{3+\sqrt{1+4/t^2}}, \quad t \to \infty. \tag{4.98}
$$

Usando (4.98) em (4.95), segue que $\{x_n\}$ deve satisfazer

$$
\begin{aligned}
[\log x_n]^2 &= o\left(\left(\frac{1-\sqrt{1+\frac{4}{\log n}}}{3+\sqrt{1+\frac{4}{\log n}}}\right)^{-1}\right) \\
&= o\left(\frac{3+\sqrt{1+\frac{4}{\log n}}}{1-\sqrt{1+\frac{4}{\log n}}}\right), \quad n \to \infty.
\end{aligned} \tag{4.99}
$$

Logo, a propriedade dos grandes desvios (4.1) ocorre para $\{x_n\}$ satisfazendo (4.99).

Antes de procedermos à demonstração do Teorema 4.5, observamos que nos casos apresentados nas seções anteriores, ou seja, para $F \in D_p(H_{i,\alpha})$, $i = 1, 2, 3, 4$, as condições necessárias e suficientes, apresentadas nos teoremas 4.1 à 4.4, foram obtidas através das relações existentes entre $H_{i,\alpha}$ e Φ_α, função de Fréchet, para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Agora, no caso em que $F \in D_p(\Phi)$, consideramos a seguinte relação entre Φ e a distribuição de Gumbel Λ: para todo $x \in \mathbb{R}$

$$
\Phi(e^x) = \exp\left\{-(e^x)^{-1}\right\} = \exp\left\{-e^{-x}\right\} = \Lambda(x). \tag{4.100}
$$

Assim, para a demonstração do Teorema 4.5 vamos recorrer aos resultados de grandes desvios de extremos sob normalização linear apresentados na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Para isso, defina

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ F(e^x) & x \geq 0. \end{cases}$$

Então, como $\log y$ é função crescente, temos

$$\begin{aligned} r(G) &= \sup\{x; G(x) < 1\} \\ &= \sup\{\log y; F(\exp(\log y)) < 1\} \\ &= \log \sup\{y; F(y) < 1\} \\ &= \log r(F). \end{aligned} \tag{4.101}$$

Além disso, considere a seguinte função auxiliar

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{1-G(t)} \int_t^{r(G)} 1 - G(x)dx \\ &= \frac{1}{1-F(e^t)} \int_{e^t}^{e^{r(G)}} \frac{1-G(\log y)}{y} dy \\ &= \frac{1}{1-F(e^t)} \int_{e^t}^{r(F)} \frac{1-F(y)}{y} dy \\ &= f(e^t), \end{aligned} \tag{4.102}$$

onde na segunda igualdade fizemos a substituição $y = e^x$, na terceira usamos (4.101) e na quarta utilizamos a definição de f dada por (2.15) da Proposição 2.6(e).

Dessa forma, como $F \in D_p(\Phi)$ e $r(F) = \infty$, segue da Proposição 2.6(e) que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1 - G(t + xg(t))}{1 - G(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - F\left(e^t \exp\left\{xf(e^t)\right\}\right)}{1 - F(e^t)} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{1 - F\left(y \exp\{xf(y)\}\right)}{1 - F(y)} \\ &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Então, da Proposição 2.2(iii), segue que $G \in D_l(\Lambda)$.

Além disso, segue que

$$\begin{aligned} G^n(\beta_n x + \log \alpha_n) &= F^n(\exp\{\beta_n x + \log \alpha_n\}) \\ &= F^n\left(\alpha_n (e^x)^{\beta_n}\right) \\ &= F^n\left(\alpha_n |e^x|^{\beta_n} sign(e^x)\right) \to \Phi(e^x) = \Lambda(x). \end{aligned} \tag{4.103}$$

Dessa forma, as constantes de normalização de G podem ser escolhidas como sendo $a_n = \beta_n$ e $b_n = \log \alpha_n$.

Assim como na demonstração da Proposição 3.3, dividimos a prova do Teorema 4.5 em três lemas.

Lema 4.13 *Suponha $F \in D_p(\Phi)$ com $r(F) = \infty$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à*

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left\{ z_n - \int_{\log\alpha_n}^{\beta_n z_n + \log\alpha_n} \frac{1}{g(u)} du \right\} = 1 \tag{4.104}$$

em que $z_n = \log y_n$.

Prova. Primeiramente, tomando uma sequência $\{z_n\}$ tal que $z_n = \log y_n$, por (4.100) e (4.103), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1 - F^n(\alpha_n |y_n|^{\beta_n} sign(y_n))}{1 - \Phi(y_n)} &= \frac{1 - G^n(\beta_n z_n + \log\alpha_n)}{1 - \Phi(e^{z_n})} \\ &= \frac{1 - G^n(\beta_n z_n + \log\alpha_n)}{1 - \Lambda(z_n)}. \end{aligned} \tag{4.105}$$

Em outras palavras, (4.105) nos diz que se $F \in D_p(\Phi)$, a propriedade dos grandes desvios (4.1) (potência) ocorre se, e somente se, a propriedade dos grandes desvios (3.3) (clássico) ocorre para $G \in D_l(\Lambda)$.

Supondo $r(F) = \infty$ e por (4.101), temos que $r(G) = \infty$. Como $G \in D_l(\Lambda)$ com $r(G) = \infty$, pelo Lema 3.4 e por (4.105), segue que a propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à (4.104) como queríamos.

□

Antes de enunciarmos os próximos dois lemas, recordamos o fato de que sendo $G \in D_l(\Lambda)$ com constantes $a_n = \beta_n$ e $b_n = \log\alpha_n$, pela Proposição 2.3, segue que $\beta_n = g(\log\alpha_n)$.

Lema 4.14 *Suponha $F \in D_p(\Phi)$ com $r(F) = \infty$. Uma condição suficiente para a propriedade de grandes desvios (4.1) é (4.94).*

Prova.

Suponha que exista uma função não-decrescente $\xi(t)$ com $\xi(\infty) = \infty$ e $\xi(\log\alpha_n) = x_n$, que satisfaz (4.94). Por (4.102), temos

$$g'(t) = f'(e^t)e^t. \tag{4.106}$$

Para t suficientemente grande, temos que $\xi(t) > 0$ e podemos considerar

$$\xi_1(t) = \log\xi(t),$$

de tal forma que $\xi_1(t)$ é não-decrescente, $\xi_1(\infty)=\infty$ e

$$\xi_1(\log\alpha_n)=\log\xi(\log\alpha_n)=\log x_n=x_n'.$$

Então, por (4.106) e (4.94), temos

$$\lim_{t\to\infty}[\xi_1(t)]^2g'(t)=\lim_{t\to\infty}\left[\log\xi(t)\right]^2 f'\left(e^t\right)e^t=0.$$

Assim, como $G\in D_l(\Lambda)$, com $r(G)=\infty$ e $\xi_1(t)$ satisfazendo a condição (3.24) da Proposição 3.3, com $\xi_1(t)$ não-decrescente, $\xi_1(\infty)=\infty$ e $\xi_1(b_n)=x_n'$ sendo $b_n=\log\alpha_n$, então a propriedade de grande desvios (3.3) (clássica) é satisfeita, ou seja, como $a_n=\beta_n$ e $b_n=\log\alpha_n$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-G^n\left(\beta_n y_n'+\log\alpha_n\right)}{1-\Lambda(y_n')}=1,$$

para qualquer sequência $\{y_n'\}$ tal que $y_n'=O(x_n')=O(\log x_n)$.

Logo, se $y_n=O(x_n)$ e $z_n=\log y_n$ segue de (4.105) que a propriedade de grandes desvios (4.1) (potência) é satisfeita para $F\in D_p(\Phi)$, com $r(F)=\infty$.

$\square$

O próximo lema garante a equivalência entre (4.104) e (4.93), ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left\{z_n-\int_{\log\alpha_n}^{\beta_n z_n+\log\alpha_n}\frac{1}{g(u)}du\right\}=1$$

e

$$\lim_{t\to\infty}[R(t+\delta f(e^t)\log\xi(t))-R(t)-\delta\log\xi(t)]=0$$

são equivalentes.

Lema 4.15 *Considerando as mesmas hipóteses do Teorema 4.5. Então as Equações (4.104) e (4.93) são equivalentes.*

Prova.

Primeiramente, recordamos que, pelo Lema 4.13, $z_n=\log y_n$, em que $y_n=O(x_n)$. Sendo $z_n=\log y_n\le Ax_n'=A\log x_n$, se tomarmos

$$\delta_n=\frac{z_n}{x_n'}=\frac{z_n}{\log x_n}\in[0,A],$$

então podemos escrever

$$z_n=\delta_n\log x_n$$

e

$$\begin{aligned} z_n - \int_{\log \alpha_n}^{\beta_n z_n + \log \alpha_n} \frac{1}{g(u)} du &= \delta_n \log x_n - \int_{z_0}^{\beta_n \delta_n \log x_n + \log \alpha_n} \frac{1}{g(u)} du + \int_{z_0}^{\log \alpha_n} \frac{1}{g(u)} du \\ &= \delta_n \log x_n - R(\beta_n \delta_n \log x_n + \log \alpha_n) + R(\log \alpha_n). \quad (4.107) \end{aligned}$$

Sendo $\xi(\log \alpha_n) = x_n$, $\beta_n = g(\log \alpha_n)$ e $g(t) = f(e^t)$, por (4.102), então, por (4.107), temos que (4.104) é equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \Big[R\big(\delta f(\exp\{\log \alpha_n\}\big) \log \xi(\log \alpha_n) - \log \alpha_n) + R(\log \alpha_n) - \delta \log \xi(\log \alpha_n) \Big] = 0, \quad (4.108)$$

uniformemente localmente em δ. Agora, como $\log \alpha_n \to \log r(F) = \infty$, temos que (4.108) é implicada por (4.93).

Reciprocamente, suponha a validade de (4.108). Defina $\xi_1(t)$ como na prova do Lema 3.6 e de tal forma que $\xi_1(\log \alpha_n) = x'_n = \log x_n$ e $\xi_1(\infty) = \infty$. Como $G \in D_l(\Lambda)$ e $r(G) = \infty$, pela Proposição 3.3, temos a validade de (3.23), ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} [R(t + \delta g(t)\xi_1(t)) - R(t) - \delta \xi_1(t)] = 0,$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$. Agora, como para t suficientemente grande definimos $\xi_1(t) = \log \xi(t)$ e, sendo $g(t) = f(e^t)$, então (4.93) segue e o lema está provado.

□

Prova do Teorema 4.5.

Pelos Lemas 4.13 e 4.15 temos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.93). A suficiência da condição (4.94) foi mostrada no Lema 4.14.

□

4.6 Caso $F \in D_p(\Psi)$

Nesta última seção, analisamos a propriedade de grandes desvios no caso $F \in D_p(\Psi)$, com $r(F) = 0$, onde Ψ é descrita na Proposição 2.5(f). Neste caso, segue da Proposição 2.6(f) que

$$\lim_{t\uparrow 0} \frac{1 - F\left(t \exp\{x f(t)\}\right)}{1 - F(t)} = e^x, \quad x < 0,$$

onde a função auxiliar $f(t)$ pode ser escolhida como

$$f(t) = -\frac{1}{1-F(t)} \int_t^0 \frac{1-F(x)}{x} dx, \quad t < 0 \tag{4.109}$$

e as constantes estabilizantes podem ser escolhidas como

$$\alpha_n = -F^{\leftarrow}(1-1/n) \ \text{ e } \ \beta_n = f(-\alpha_n).$$

No próximo teorema são apresentadas condições necessárias e suficientes para a validade da propriedade de grandes desvios neste caso.

Teorema 4.6 *Suponha que $F \in D_p(\Psi)$ com $r(F) = 0$. A propriedade de grandes desvios (4.1) ocorre se, e somente se, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ satisfazendo $\xi(\infty) = 0$, $\xi(-\log \alpha_n) = x_n$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \left[R\left(t + \delta f\left(-e^{-t}\right)(-\log(-\xi(t)))\right) - R(t) - \delta(-\log(-\xi(t)))\right] = 0, \tag{4.110}$$

uniformemente localmente em $\delta \in [0, \infty)$, em que para algum $z_0 < r(F) = 0$

$$R(t) = \int_{z_0}^t \frac{1}{f(-e^{-u})} du \quad para \quad t > z_0.$$

Além disso, se

$$\lim_{t\to\infty} [\log(-\xi(t))]^2 f'(-e^{-t})e^{-t} = 0, \tag{4.111}$$

então (4.110) é válida.

Observe que a condição (4.111) do Teorema 4.6 pode ser reescrita como

$$[\log(-\xi(t))]^2 = o\left(\left(f'(-e^{-t})e^{-t}\right)^{-1}\right), \quad t \to \infty, \tag{4.112}$$

Observação 4.4 *Feng e Chen [12] apresentaram o Teorema 4.6 sem utilizar a restrição $r(F) = 0$. Porém, assim como na demonstração do Teorema 4.5, precisamos considerar tal restrição para utilizarmos a expressão (3.29), que é válida somente para $y_n \to \infty$.*

Antes de demonstramos o Teorema 4.6 apresentamos um exemplo de aplicação deste resultado. Para isso, consideramos a função de distribuição F apresentada no Exemplo 2.9, no Capítulo 2, e obtemos uma sequência $\{x_n\}$ para a qual é válida a propriedade de grandes desvios (4.1), usando a condição (4.111) do Teorema 4.6.

Exemplo 4.2 *Seja*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - \exp\left\{-\sqrt{-log(-x)}\right\}, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Queremos determinar uma sequência $\{x_n\} \uparrow r(F) = 0$, *com a convergência tão rápido quanto possível de tal forma que a propriedade de grandes desvios (4.1) seja válida. Pelo Teorema 4.6 uma condição suficiente para (4.1) é (4.112), ou seja,*

$$[\log(-\xi(t))]^2 = o\left(\left(f'(-e^{-t})e^{-t}\right)^{-1}\right), \quad t \to \infty,$$

em que ξ *é uma função não-decrescente satisfazendo* $\xi(\infty) = 0$ *e* $\xi(-\log \alpha_n) = x_n$.

Por (2.24) do Exemplo 2.9, para $-1 \leq t < 0$,

$$f(t) = 2\left(1 + \sqrt{-\log(-t)}\right).$$

Assim, para $-1 < t < 0$,

$$f'(t) \;=\; \left(2\left(1 + \sqrt{-\log(-t)}\right)\right)' = -t^{-1}\left(-\log(-t)\right)^{-1/2},$$

de forma que, para $t > 0$, *como* $-1 < -e^{-t} < 0$, *temos que*

$$\begin{aligned} f'(-e^{-t})e^{-t} &= \left[-(-e^{-t})^{-1}\left(-\log(-(-e^{-t}))\right)^{-1/2}\right]e^{-t} \\ &= \left[e^{t}\left(-\log(e^{-t})\right)^{-1/2}\right]e^{-t} \\ &= t^{-1/2}. \end{aligned} \tag{4.113}$$

Substituindo (4.113) em (4.112), obtemos que

$$[\log(-\xi(t))]^2 = o\left(t^{1/2}\right), \quad t \to \infty, \tag{4.114}$$

Pelo Exemplo 2.9, podemos tomar $\alpha_n = \exp\{-(\log n)^2\}$. *Como* $\xi(-\log \alpha_n) = x_n$, *segue que*

$$\begin{aligned} [\log(-x_n)]^2 &= [\log(-\xi(-\log \alpha_n))]^2 \\ &= \left[\log\left(-\xi\left((\log n)^2\right)\right)\right]^2 \\ &= o(\log n), \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{4.115}$$

Dessa forma devemos tomar uma sequência $\{x_n\}$ *satisfazendo (4.115) com* $x_n \uparrow 0$ *e teremos (4.1), para toda sequência* $y_n = O(x_n)$.

Em particular, tomando $y_n = x_n = -\exp\left\{-(\log n)^{1/2k}\right\}$, $k > 1$ *constante, temos que* $x_n \uparrow 0$ *e satisfaz (4.115), pois*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\log(-x_n)]^2}{\log n} = \lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1+1/k} = 0,$$

já que $k > 1$ *é fixo. Assim, através da Figura 4.1 podemos visualizar a aproximação de* $F^n\left(\alpha_n|x|^{\beta_n} sign(x)\right)$ *e* $\Psi_1(x)$ *para diferentes valores de* n. *Já na Figura 4.2 podemos* *comparar o comportamento de* $\frac{1-F^n\left(\alpha_n|x_n|^{\beta_n} sign(x_n)\right)}{1-\Psi(x_n)}$ *para* k *assumindo* 1 *ou* 10*, além de notar que quanto maior o valor de* k *menor necessita ser* n *para que o limite convirja para* 1*, justificando o fato de exigirmos que a sequência* $\{x_n\}$ *convirja tão rápido quanto possível.*

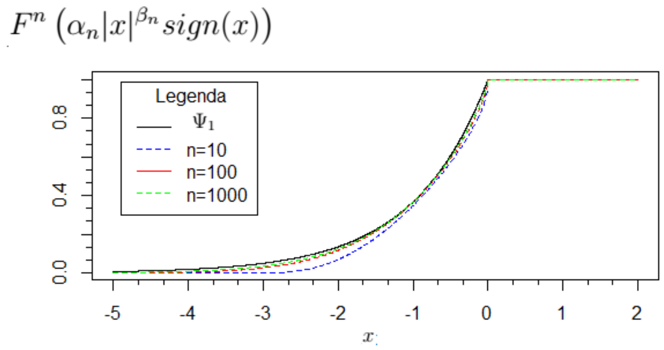
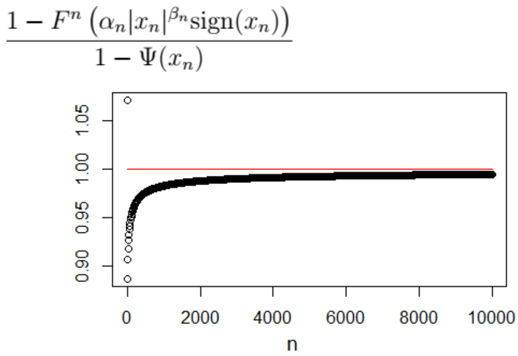
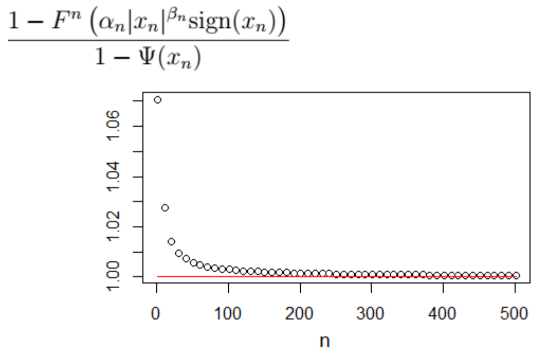


Figura 4.1: Convergência de F



(a) $k=1$



(b) $k=10$

Figura 4.2: Grandes Desvios para $x_n = -\exp\left\{-(\log n)^{1/2k}\right\}$

A prova do Teorema 4.6 é obtida de maneira análoga à prova do Teorema 4.5, fazendo uso da seguinte relação entre Ψ e Λ:

$$\Psi(-e^{-x}) = \exp\left\{-e^{-x}\right\} = \Lambda(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.116}$$

e recorremos aos resultados de grandes desvios de extremos sob normalização linear.

Para isso, definimos a f.d. dada por

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ F\left(-e^{-x}\right) & x \geq 0, \end{cases}$$

de modo que podemos escrever o ponto extremo superior de G em termos do de F, da seguinte forma

$$\begin{aligned} r(G) &= \sup\{x; G(x) < 1\} \\ &= \sup\left\{x; F\left(e^{-x}\right) < 1\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\inf\left\{-x; F\left(-e^{-x}\right) < 1\right\} \\ &= -\log\inf\left\{e^{-x}; F\left(-e^{-x}\right) < 1\right\} \\ &= -\log\left(-\sup\{y; F(y) < 1\}\right) \\ &= -\log(-r(F)), \end{aligned}$$

ou seja,

$$r(F) = -\exp\{-r(G)\}. \tag{4.117}$$

Além disso, se $G \in D_l(\Lambda)$, pela Equação (2.3) da Proposição 2.2, temos que a função auxiliar g, para $t \geq 0$, pode ser escolhida como

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{1}{1-G(t)}\int_t^{r(G)} 1 - G(x)dx \\ &= -\frac{1}{1-F(-e^{-t})}\int_t^{r(G)} 1 - F(-e^{-x})dx \\ &= -\frac{1}{1-F(-e^{-t})}\int_{-e^{-t}}^{r(F)} \frac{1-F(y)}{y}dy \\ &= f(-e^{-t}), \end{aligned} \tag{4.118}$$

onde na segunda igualdade fizemos a substituição $y = -e^{-x}$, na terceira usamos (4.117) e na quarta utilizamos a definição de f dada por (2.17) da Proposição 2.6(f).

Note que, assim como na demonstração do Teorema 4.5, para aplicarmos os resultados da teoria dos grandes desvios para $G \in D_l(\Lambda)$, devemos ter que $r(G) = \infty$.

Neste caso, por (4.117), vamos restringir nosso estudo apenas ao caso $F \in D_p(\Psi)$ com $r(F) = 0$.

Agora, como $F \in D_p(\Psi)$ e $r(F) = 0$, segue da Proposição 2.6(f) com $g(t)$ dada em (4.118), que para $x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1-G(t+xg(t))}{1-G(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-F\left(-\exp\{-t-xg(t)\}\right)}{1-F(-e^{-t})} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1-F\left(-e^{-t}\exp\{-xf(-e^{-t})\}\right)}{1-F(-e^{-t})} \\ &= \lim_{y\uparrow 0} \frac{1-F\left(y\exp\{-xf(y)\}\right)}{1-F(y)} \\ &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Então, pela Proposição 2.2(iii), temos que $G \in D_l(\Lambda)$.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} G^n(\beta_n x - \log\alpha_n) &= F^n(-\exp\{-\beta_n x + \log\alpha_n\}) \\ &= F^n(-\alpha_n(e^{-x})^{\beta_n}) \end{aligned}$$

$$= F^n(\alpha_n|-e^{-x}|^{\beta_n} sign(-e^{-x})) \to= \Psi(-e^{-x}) = \Lambda(x) \tag{4.119}$$

e assim, as constantes de normalização para G podem ser escolhidas como $a_n = \beta_n$ e $b_n = -\log\alpha_n$.

Assim como nos casos anteriores dividimos a prova do Teorema 4.6 em três lemas.

Lema 4.16 *Suponha $F \in D_p(\Psi)$ com $r(F) = 0$. A propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à*

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left\{z_n - \int_{-\log\alpha_n}^{\beta_n z_n - \log\alpha_n} \frac{1}{g(u)} du\right\} = 1, \tag{4.120}$$

em que $z_n = -\log(-y_n)$.

Prova. Analogamente à prova do Lema 4.13, tomando uma sequência $\{z_n\}$ tal que $z_n = -\log(-y_n)$, por (4.116) e (4.119), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1-F^n(\alpha_n|y_n|^{\beta_n} sign(y_n))}{1-\Psi(y_n)} &= \frac{1-G^n(\beta_n z_n - \log\alpha_n)}{1-\Psi(-e^{-z_n})} \\ &= \frac{1-G^n(\beta_n z_n - \log\alpha_n)}{1-\Lambda(z_n)}. \end{aligned} \tag{4.121}$$

Logo, se $F \in D_p(\Psi)$, a propriedade dos grandes desvios (4.1) (potência) ocorre se, e somente se, a propriedade dos grandes desvios (3.3) (clássico) ocorre para $G \in D_l(\Lambda)$.

Supondo $r(F) = 0$, por (4.117) temos que $r(G) = \infty$. Como $G \in D_l(\Lambda)$ com $r(G) = \infty$, pelo Lema 3.4 e por (4.121), segue que a propriedade dos grandes desvios (4.1) é equivalente à (4.120) como queríamos.

□

Como $G \in D_l(\Lambda)$ com constantes $a_n = \beta_n$ e $b_n = -\log \alpha_n$, pela Proposição 2.3, segue que $\beta_n = g(-\log \alpha_n)$.

Lema 4.17 *Suponha que $F \in D_p(\Psi)$ com $r(F) = 0$. Uma condição suficiente para a propriedade dos grandes desvios (4.1) é (4.111), ou seja,*

$$\lim_{t\to\infty} [\log(-\xi(t))]^2 f'(-e^{-t})e^{-t} = 0.$$

Prova.

Por (4.118), temos

$$g'(t) = f'(-e^{-t})e^{-t}. \tag{4.122}$$

Por hipótese, existe uma função não-decrescente $\xi(t)$ com

$$\xi(\infty) = r(F) = 0 \quad \text{e} \quad \xi(-\log \alpha_n) = x_n$$

e que satisfaz (4.111).

Seguindo as mesmas ideias da prova do Lema 4.14 podemos considerar uma função não-decrescente $\xi_1(t)$, com

$$\xi_1(t) = -\log(-\xi(t)),$$

para t suficientemente grande, de tal forma que

$$\xi_1(\infty) = \infty, \quad \xi_1(b_n) = \xi_1(-\log \alpha_n) = -\log(-x_n) = x'_n$$

e que, por (4.122) e (4.111), satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} [\xi_1(t)]^2 g'(t) = \lim_{t\to\infty} [\log(-\xi(t))]^2 f'\left(-e^{-t}\right) e^{-t} = 0.$$

Dessa forma, considerando $y_n = O(x_n)$ e $z_n = -\log(-y_n)$, a prova do lema segue análoga ao final da prova do Lema 4.14.

□

Lema 4.18 *Considerando as mesmas hipóteses do Teorema 4.6. Então as Equações (4.120) e (4.110) são equivalentes.*

Prova.

A prova é completamente análoga à prova do Lema 4.18 da seção anterior, bastando considerar

$$\delta_n = \frac{\log(-y_n)}{\log(-x_n)},$$

em que $y_n = O(x_n)$, $z_n = -log(-y_n)$. Neste caso, $\delta_n \in [0, A]$ e $z_n = \delta_n(-\log(-x_n))$.

Assim, obtemos

$$z_n - \int_{-\log\alpha_n}^{\beta_n z_n - \log\alpha_n} \frac{1}{g(u)} du = \delta_n\big(-\log(-x_n)\big) - R\big(\beta_n\delta_n(-\log(-x_n)) - \log\alpha_n\big) + R(-\log\alpha_n).$$

Observando que $\xi(-\log\alpha_n) = x_n$ e $\beta_n = g(-\log\alpha_n)$, $g(t) = f(-e^{-t})$ e $-\log\alpha_n \to \infty$, repetindo os mesmos passos da prova do Lema 4.18 para provar a equivalência entre (4.120) e (4.110).

□

Finalmente, com os três lemas anteriores concluímos a prova do Teorema 4.6.

Prova do Teorema 4.6.

Pelos Lemas 4.16 e 4.18 temos a equivalência entre a propriedade dos grandes desvios (4.1) e a condição (4.110). A suficiência da condição (4.111) foi mostrada no Lema 4.17.

□

Referências Bibliográficas

[1] Anderson, C. W. Super Slowly Varying Functions in Extreme Value Theory. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**. v. 40, nº 2, p.197-202, 1978.

[2] Balkema, A.A.; Haan, L. de. On R. Von-Mises' condition for the domain of attraction of exp$\{e^{-x}\}$. **Ann. Math. Statist.**, v.43, p.1352-1354, 1972.

[3] Barakat, H.M.; Nigm, E.M. Extreme order statistics under power normalization and random sample size. **Statist. Probab. Lett**. v.29, p.27-41, 2002.

[4] Baricz, A. Mills' ratio: Monotonicity patterns and functional inequalities. **Jornal of Mathematical Analysis and Applications**. v.340, p.1362-1370, 2008.

[5] Birnbaum, Z. W. An inequality for Mill's ratio. **The Annals of Mathematical Statistics**, v. 13, p. 245-246, 1942.

[6] Cook, J. D. **Upper and lower bounds for the normal distribution function**. 2009. Disponível online em: <http://www.johndcook.com/normalbounds.pdf>. Acessado em: 21 de março de 2017.

[7] Christoph, G.; Falk, M. A note on domains of attraction of p-max stable laws. **Statist. Probab. Lett**. v.28, p.279-284, 1996.

[8] Drees, H.; Haan, L. de; Li, D. On large deviation for extremes. **Statist. Probab. Lett.** v.64, p.51?62, 2003.

[9] Embrechts, P.; Klüppelberg, C.; Mikosch, T. **Modelling Extremal Events: for Insurance and Finance**. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[10] Feller, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**, v. I, 3ª ed. Wiley, New York, 1968.

[11] Feller, W. **An Introduction to Probability Theory and Its Applications**. v. II, 2ª ed. Wiley, New York, 1971.

[12] Feng, B.; Chen, S. On large deviations of extremes under power normalization. **Statistics & Probability Letters**. v. 99, p. 27-35, 2015.

[13] Fisher, R.A.; Tippett, L.H.C. Limiting forms of the frequency distributionof the largest or smallest member of a sample. **Proc. Cambridge Philos. Soc.** v.24, p.180-190, 1928.

[14] Galambos, J. **The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics**. Jonh Wiley, New York, 1978.

[15] Gordon, R.D.; Values of Mills' ratio of area to bounding ordinate and of the normal probability integral for large values of the argument. **Ann. Math. Stat**. v.12, p.364-366, 1941.

[16] Grimmett , G.; Stirzaker , D. **One Thousand Exercises in Probability**. 2ª ed. Oxford University Press, 2001.

[17] Grimmett , G.; Stirzaker , D. **Probability and Random Processes**. 3ª ed. Oxford University Press, 2001.

[18] Goldie, C.; Smith, R. Slow variation with remainder: Theory and applications. **Quart. J. Math. Oxford (2)**, v. 38, p. 45-71, 1987.

[19] Haan L. de; Ferreira A. **Extreme Value Theory: An Introduction**. Springer, 2006.

[20] Haan, L. de; Hordijk, A. The rate of growth of sample maxima. **The Annals of Mathematical Statistics**. v. 43, nº 4, p. 1185-1196, 1972.

[21] Karr, A. F. **Probability**. Springer, New York, 1993.

[22] Komatu, Y. Elementary inequalities for Mills ratio. **Rep. Stat. Appl. Res. UJSE**. v.4, p.69-70, 1955.

[23] Lewis, J. T.; Russell, R. **An Introduction to Large Deviations for Teletraffic Engineers**. 1997. Disponível online em: <https://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/oleg_zaboronski/fm/large_deviations_review.pdf>. Acesso em: 11 de abril de 2017.

[24] Mills, J. P. Table of the ratio: area to bounding ordinate, for any portion of normal curve. **Biometrika**, v.18(3-4), p.395-400, 1926.

[25] Mohan, N.R.; Ravi, S. Max domains of attraction of univariate and multivariate p-max stable laws. **Theory Probab. Appl**. v. 37, p. 632-643, 1993.

[26] Nasri-Roudsari, D. Limit distributions of generalized order statistics under power normalization. **Comm. Statist. Theory Methods**. v.28 (6), p.1379-1389, 1999.

[27] Pantcheva, E. Limit theorems for extreme order statistics under nonliear normalization. **Lecture Notes in Mathematics**. v. 1155. p.284-309, 1985.

[28] Peng, Z.; Jiang, Q.; Nadarajah, S. Limiting distributions of extreme order statistics under power normalization and random index. **Stochastics**. v.84 (4), p.553-560, 2012.

[29] Peng, Z.; Shuai, Y.; Nadarajah, S.; On convergence of extremes under power normalization. **Extremes**. v.16, p.285-310, 2013.

[30] R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2016. <https://www.R-project.org/>.

[31] Resnick, S.I. **Extreme Values, Regular Variation and Point Processes**. Springer-Verlag, New York, 1987.

[32] Ross, S. **Probabilidade: Um curso moderno com aplicações**. 8ª ed. Bookman, Porto Alegre, 2010.

[33] Sampford, M.R. Some inequalities on Mill's ratio and related functions. **Ann. Math. Stat**. v.24, p.130-132, 1953.

[34] Seneta, E. **Regularly Varying Functions**. Springer, 1976

[35] Soares, W. M. **Distribuição assintótica do máximo estabilizado em modelos de mistura finita**. iii, 54 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

[36] Subramanya, U.R.; On max domains of attraction of univariate p-max stable laws. **Stat. Probab. Lett.** v.19, p.271-279, 1994.

[37] Yang, Z.; Chu, Y. On approximating Mills ratio. **Journal of Inequalities and Applications**. 2015. Disponível online em: <https://journalofinequalitiesandapplications.springeropen.com/articles/10.1186/s13660-015-0792-3>. Acesso em: 21 de março de 2017.